

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра “Системы управления”

681.5(07)
Э456

А.Г. Щипицын, А.А. Кощев,
Е.А. Алёшин, О.О. Павловская

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2007

УДК 681.511.2(075.8)+681.51-192(075.8)
Э456

*Одобрено
учебно-методической комиссией
приборостроительного факультета*

Рецензенты:
В.С. Жабреев, М.И. Хяютин

Элементы прикладной теории надежности: учебное пособие /
Э456 А.Г. Щипицын, А.А. Кощев, Е.А. Алёшин и др. – Челябинск:
Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 114 с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Управление в технических системах», «Системы управления летательными аппаратами» и образовательных направлений «Системный анализ и управление», «Автоматизация и управление» дневного, заочного и вечернего обучения.

В учебном пособии приведены основные термины и определения, используемые в теории надежности. Рассмотрены вопросы расчета и анализа надежности как отдельных элементов, работающих до первого отказа и с восстановлением, так и систем различных структур; отражены основные практические способы повышения надежности систем.

УДК 681.511.2(075.8)+681.51-192(075.8)

© Издательство ЮУрГУ, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Проблема надежности и долговечности современных технических устройств имеет первостепенное значение для техники в целом и, в частности, для комплексной автоматизации производства, совершенствования управления и связи, освоения космического пространства. Неисправность в работе технических устройств может привести не только к ухудшению качества выпускаемой продукции или к полному прекращению технологического процесса, но и может вызвать серьезные аварии, которые кроме технических и экономических потерь могут привести к гибели людей. Нельзя забывать и о психологическом эффекте надежности, который проявляется в недоверии к новой технике, если она часто отказывает, и, наконец, в разочаровании, унынии и потери престижа.

Появление проблемы надежности относится к самому началу развития техники, ибо ненадежные изделия никогда никому не были нужны. Однако детальное рассмотрение проблем надежности началось в связи с массовым применением различных узлов, и первым примером здесь являются шариковые и роликовые подшипники, изучение характеристик которых было проведено на заре развития железнодорожного транспорта.

С появлением электрификации значительные усилия были приложены к тому, чтобы обеспечить бесперебойную передачу энергии. Здесь впервые была использована параллельная работа генераторов, объединение линий передач и т. п. С появлением авиации возникла проблема надежности двигателей и бортовой аппаратуры, решать которую приходилось значительно труднее, чем для стационарных установок из-за многочисленных ограничений.

Новая эра в развитии надежности, которая привела к становлению ее как науки, началась с появлением электроники, вычислительной техники, автоматики, реактивной авиации и освоением космического пространства (пятидесятые годы прошлого столетия). Это обусловлено главным образом следующими причинами.

1. Ростом сложности современных систем, включающих до $10^4 \dots 10^6$ отдельных элементов.
2. Увеличением интенсивности рабочих процессов – увеличением температур, скоростей, давлений и т. п.
3. Усложнением условий эксплуатации – широкие диапазоны температур, давлений, высокие уровни вибраций, большие перегрузки, радиация и т. п.
4. Ростом требований к качеству работы систем – точности, эффективности и т. п.
5. Повышением ответственности функций, выполняемых системой, высокой технической, экономической и психологической ценой отказа.

Удовлетворить всем требованиям по надежности, предъявляемым к современным устройствам, с использованием интуитивного, эмпирического подхода к этой проблеме стало невозможно. Потребовалось привлечение математических методов для анализа и синтеза надежности схем. Так возникла *математическая теория надежности*.

Математическая теория надежности – это система определенных идей, математических моделей и методов, предназначенных для оценки, предсказания и оптимизации показателей надежности.

Для решения и исследования значительной части вопросов, возникающих в теории надежности, оказывается необходимым привлекать методы теории вероятностей и математической статистики. Это положение связано с тем обстоятельством, что свойства элементов случайным образом изменяются от образца к образцу как из-за отличия внутренних, молекулярных свойств вещества, так и из-за погрешностей изготовления и различных условий эксплуатации. Естественно, что в этих условиях невозможно предсказать срок службы каждого изделия, однако относительно больших партий этих изделий можно сделать достаточно определенные предсказания, поскольку здесь мы имеем дело с массовыми случайными явлениями, изучением которых успешно занимается теория вероятностей и математическая статистика.

Усилиями специалистов надежность агрегатов, машин, производств непрерывно возрастает за счет введения новых технических и организационных средств защиты человека и окружающей среды, однако количество аварийных ситуаций растет. Увеличивается и их цена. Так, в США за 30 лет (1950–1980 гг.) число аварий в нефтеперерабатывающем производстве возросло в 2,6 раза, количество жертв в 6 раз, а экономический ущерб – в 11 раз!

Дело в том, что современные производства и машины проектируются с позиций существующего понимания характера опасностей и возможностей их предотвращения. Конечные величины надежности отдельных блоков, дефекты изготовления, отклонения от режимов не могут быть полностью заблокированы никакими системами контроля и защиты. Например, потенциально опасные производства могут иметь вероятность крупной аварии за год порядка 10^{-4} . Это означает, что в среднем такой единичный объект будет отказывать 1 раз в 10 тысяч лет. Тиражирование объектов приводит к тому, что за ограниченный отрезок времени почти наверное наступит авария.

Попытки предания объекту избыточной надежности блокируются экономическими ограничениями, до и к моменту выпуска объекта не всегда появляются нужные технические средства.

Модернизация объекта по мере расширения масштаба его использования затруднена в силу инерционности инфраструктуры (стандарты, связи предприятий, инерции обучения) и экономическими затратами.

Аварии, как правило, развиваются в три фазы. Первая состоит в накоплении дефектов, которые сами по себе не представляют угрозы. Такие дефекты либо не наблюдаются, либо персонал не обращает (по привычке) на них внимание.

На следующей фазе происходит какое-нибудь случайное инициирующее событие, как правило, редкое и неожиданное.

Третья фаза представляет собой собственно аварию – неконтролируемое развитие процессов.

Поэтому понятно, сколь велика роль предупреждения именно первой стадии, поскольку вторая стадия трудно предсказуема. При этом можно идти как по пути

совершенствования встроенных систем контроля, так и по пути отбора, подготовки и создания условий работы персонала.

Насыщенность промышленности потенциально опасными производствами требует поиска оптимальных решений в области человеко-машинных взаимодействий, создания тренажеров с развитым программным обеспечением, уменьшение объема информации оператору, увеличение числа средств поддержки действий оператора, введение систем защиты от несанкционированных действий, повышение эффективности встроенных систем контроля и диагностики.

1. НАДЕЖНОСТЬ. ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Терминология теории надежности

Функционирование системы – процесс выполнения заданного рабочего алгоритма при использовании системы по назначению. Физически – это процесс непрерывного и (или) дискретного изменения технического состояния системы.

Техническое состояние – совокупность свойств объекта, характеризующее степень его функциональной пригодности в заданных условиях. Определить техническое состояние – значит выяснить, обладает ли объект набором требуемых свойств, а если не обладает – то по какой причине (это задача технической диагностики).

Виды технических состояний:

- исправность – неисправность;
- работоспособность – неработоспособность;
- правильное и неправильное функционирование.

Исправность – состояние объекта (системы), в котором он полностью удовлетворяет всем требованиям, установленным в нормативно-технической документации (НТД).

Неисправность – состояние объекта, в котором он не соответствует хотя бы одному требованию НТД.

Повреждение – событие, состоящее в нарушении исправности.

Работоспособность – состояние системы, в котором она в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным в отношении основных параметров, характеризующих нормальное выполнение заданных функций системы. Необходимые требования, по которым определяется работоспособность, должны быть записаны в технической документации на систему.

Предельное состояние объекта – это состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна по причине нарушений работоспособности объекта.

Безотказность – свойство системы непрерывно сохранять свою работоспособность в определенных режимах и условиях эксплуатации. Часто аналогичное определение дают для надежности, например, в [2]: надежность – свойство системы (узла, элемента) выполнять задание (свои функции) в установленном объеме при заданных условиях эксплуатации. Будем называть безотказность “надежностью в узком смысле”.

Долговечность – свойство системы длительно сохранять свою работоспособность в определенных режимах и условиях эксплуатации до некоторого предельного состояния.

Таким предельным режимом могут быть поломка, предельный износ, выход параметров из допуска и т. п. Долговечность отличается от безотказности тем, что здесь не оговаривается непрерывная работа системы и допускаются перерывы на ремонт.

Ремонтопригодность – свойство системы, выражающееся в приспособленности к восстановлению исправного состояния (работоспособности) и к поддержанию долговечности путем предупреждения, обнаружения и устранения неисправностей и отказов.

Сохраняемость – свойство системы, состоящее в том, чтобы сохранять работоспособность в процессе ее хранения в заданных условиях.

Надежность (в широком смысле) – есть свойство системы, обусловленное ее безотказностью, долговечностью, ремонтопригодностью и сохраняемостью и обеспечивающее нормальное выполнение заданных функций системы.

Здесь и далее под системой будем понимать совокупность совместно действующих объектов (например, машин, устройств, элементов и т. п.).

Отказ – событие, состоящее в полной или частичной утрате работоспособности. Отказы могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. По степени влияния на работоспособность – полный отказ и частичный отказ. Полный отказ приводит к полному нарушению работоспособности, а частичный вызывает несоответствие системы ряду требований, например, рост динамической ошибки при сохранении величины статической ошибки.

2. По физическому характеру отказа – внезапный (катастрофический отказ), который приводит к скачкообразному изменению параметров элемента, например, обрыв, короткое замыкание и т. д., и постепенный (параметрический), который выражается в медленном изменении параметров (старение, износ; отказ кинескопа). При внезапном отказе процесс перехода системы и работоспособного состояния в неработоспособное происходит за время много меньшее времени работы системы (перегорание лампочки).

3. По связи с другими отказами – независимый отказ, который не является причиной отказа других элементов, и зависимый отказ, который приводит к изменению характеристик надежности других элементов.

4. По времени существования – устойчивый отказ (типа обрыв), временный отказ (сбой, вызванный, например, временным изменением условий эксплуатации и исчезающий (самоустраняющийся) при их нормализации) и перемежающийся

отказ – многократно повторяющийся временной отказ, свидетельствующий о ненормальном режиме работы или эксплуатации.

5. По последствиям – обычные отказы (прекращают функционирование объекта) и аварийные отказы (сопровождаются разрушением объекта и т. д.).

6. По внешнему проявлению – явные отказы и скрытые (трудно обнаруживаемые) отказы, для выявления которых используют специальные средства.

7. По возможности устранения – устранимые и неустранимые.

8. По времени возникновения – на этапе испытания, приработки или нормальной эксплуатации объекта.

Для каждой конкретной системы понятие “отказ” и его классификация необходимо детально изучить и конкретизировать, так как в зависимости от этого изменяются способы расчета и обеспечения надежности системы.

Наработка на отказ – продолжительность или объем работы объекта до возникновения отказа.

Технический ресурс объекта – это его наработка от начала эксплуатации или её возобновления после капитального ремонта до наступления предельного состояния объекта.

1.2. Математическая модель надежности

До сих пор мы говорили о понятиях надежности в чисто качественном смысле. Введем теперь количественные характеристики надежности. Построим, согласно [1], математическую модель изучаемого явления, используя следующий подход.

Выделим множество $\mathbf{X} = \{x\}$ таких состояний x системы, которые отличаются между собой с точки зрения надежности. Множество $\mathbf{X}$ назовем фазовым пространством системы. Например, если система состоит из N различных элементов, то ее фазовое пространство образуется точками вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, причем можно положить, что $x_i = 1$, если i -й элемент исправен, и $x_i = 0$, если i -й блок неисправен. Иногда можно указать физический смысл значений x , например, для полупроводникового диода в качестве фазовых координат можно принять прямое и обратное сопротивление. В этом случае фазовое пространство $\mathbf{X}$ состоит из совокупности точек первого квадранта плоскости $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 = R_{\text{пр}}$, $x_2 = R_{\text{обр}}$.

Будем полагать, что соответствующее фазовое пространство выбрано. С течением времени элементы системы изменяют свои свойства, поэтому если в момент времени t_1 состояние системы описывалось точкой x_1 , то в момент времени t_2 состоянию системы соответствует точка x_2 . При этом может оказаться, что $x_1 \neq x_2$ и последовательность состояний $x(t) \in \mathbf{X}$ при $t \geq 0$ можно рассматривать как процесс, протекающий во времени. Так как изменение состояний носит случайный характер, то значения $x(t)$ можно рассматривать как траекторию случайного процесса, протекающего в фазовом пространстве состояний системы $\mathbf{X}$.

Вторым шагом построения математической модели является определение этого допустимого процесса, т. е. определение его статистических характеристик. Это определение обычно производится на основании экспериментальных данных. При этом возникает вопрос о выборе числовых характеристик надежности. Такой выбор зависит от конкретных условий и назначения системы, причем иногда необходимо вычислять одновременно несколько характеристик, поскольку надежность – это сложное, комплексное понятие, включающее различные стороны, которые могут иметь различную относительную ценность. В самом общем плане характеристики надежности можно рассматривать как математическое ожидание от некоторого функционала Φ , определенного на траекториях процесса $x(t)$. Говорят, что функционал Φ определен на процессе $x(t)$, если каждой траектории $x(t)$ ставится в соответствии некоторое число $\Phi[x(t)]$.

Обобщенный показатель надежности ϕ определяется как математическое ожидание от этого функционала:

$$\phi = M\{\Phi[x(t)]\}. \quad (1.1)$$

Используя общий подход, можно определить ряд различных показателей надежности. Например, вероятность безотказной работы $P(t)$ можно получить следующим образом. Выделим в фазовом пространстве X подмножество $X_1 \subset X$ такое, что система считается неработоспособной, если ее состояние $x(t) \in X_1$. Функционал Φ_1 определим следующим образом. Пусть $\Phi_1[x(t)] = 0$, если хотя бы при одном значении $s \leq t$ траектория $x(s)$ проходит через точки подмножества X_1 ; в противном случае полагаем $\Phi_1[x(t)] = 1$. Очевидно, что при этом величина $M\{\Phi_1[x(t)]\} = P(t)$, т. е. вероятности безотказной работы в интервале $[0, t]$. Действительно, если все траектории при $s \leq t$ проходят через X_1 , то вероятность безотказной работы равна нулю, а если ни одна не проходит – то единице.

Определим еще один функционал $\Phi_2[x(t)]$, равный длительности интервала времени от начала работы системы до первого попадания траектории в множество X_1 . Константа $T = M\{\Phi_2[x(t)]\}$ представляет собой важную числовую характеристику надежности – среднее время безотказной работы системы.

Возможны и другие подходы к определению надежности системы, например, экономические трактовки задач теории надежности. Пусть надежность системы характеризуется функционалом $\Phi[x(t), T]$, где T – время использования системы, а $\omega\{\Phi[x(t), T]\}$ – ущерб, вызванный ненадежностью, за время T . Если устранение каждого отказа стоит C , а число отказов за время T равно $N(T)$, то общие расходы, связанные с эксплуатацией системы за время T , равны в среднем

$$M[\omega\{\Phi[x(t), T]\} + CN(T)]. \quad (1.2)$$

Целесообразно проектировать систему так, чтобы минимизировать указанный функционал.

Пусть качество работы изделия характеризуется вектором состояния $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Для каждого изделия компоненты вектора (1.3) выбираются индивидуально в зависимости от особенностей его применения.

Любая техническая система является динамической, т. е. изменяет свое состояние с течением времени:

$$\bar{X}(t_1) \neq \bar{X}(t_2), \quad (1.4)$$

поэтому геометрически состояние системы можно отобразить в виде точки в n -мерном пространстве, причем эта точка движется в нем с течением времени (рис. 1). По договоренности за начальный момент времени принимается всегда $t_0 = 0$.

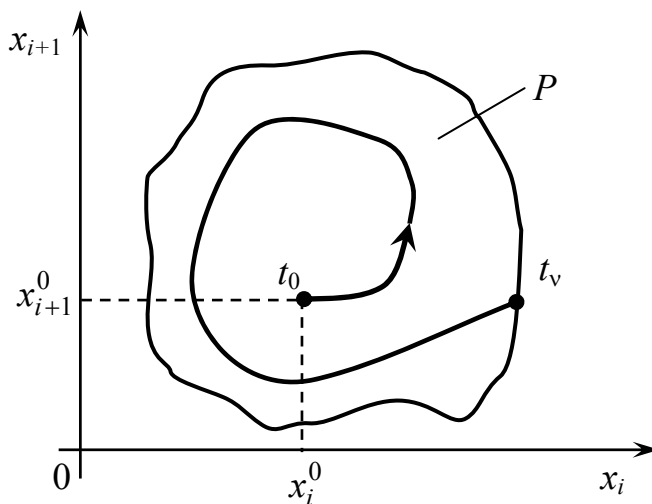


Рис. 1. Фазовая траектория:
 P – область работоспособности;
 t_0 – начальный момент времени;
 t_v – момент отказа;
 $t_v - t_0 = \tau$ – время жизни элемента
 (время безотказной работы);
 x_i, x_{i+1} – параметры изделия

Множество точек, отображающих состояние изделия, образуют фазовую траекторию, которая исчерпывающим образом описывает поведение изделия. Если с этой траекторией связать числовые характеристики, то их можно использовать для объективного описания надежности системы. В зависимости от типа решаемой задачи можно определить несколько различных характеристик. Чаще всего интересуются интервалом времени от $t = t_0 = 0$ до того момента, когда происходит отказ. Область работоспособности (в общем случае – криволинейная область) удобно задавать геометрически (см. рис. 1). Принято, что в момент t_0 изделие всегда работоспособно, т. е. $\bar{X}(t_0) \in P$.

Свойства фазовых траекторий однотипных объектов всегда обладают изменчивостью. Это объясняется неизбежными отклонениями их индивидуальных характеристик, которые вызываются множеством технологических причин при изготовлении и эксплуатации. В силу множества влияющих факторов предсказать

индивидуальное свойство изделия невозможно. Анализу подлежат усредненные характеристики, которые формализуются при помощи понятия “случайная величина” и изучаются в теории вероятностей. Поэтому *математической основой теории надежности является теория вероятностей*.

2. НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ, РАБОТАЮЩИХ ДО ПЕРВОГО ОТКАЗА

2.1. Основные характеристики надежности

Рассмотрим основные характеристики надежности элементов, работающих до первого отказа. Отметим, что под термином “элемент” принято понимать всякую систему, часть ее, узел, блок, надежность которых изучается независимо от надежности составляющих их частей. Т. е., элемент (в теории надежности) – функционально законченная часть систем, обладающая самостоятельной характеристикой надежности.

Элементы разделяют на 2 группы: – первичные; – состоящие из первичных.

Надежность первичных элементов определяется путем анализа физических процессов в элементе, либо из опыта эксплуатации, либо путем проведения испытаний на надежность.

Надежность элементов, состоящих из первичных, определяется расчетными методами на основе информации о первичных элементах.

Надежность элементов системы связывается с недопустимостью самопроизвольных, нежелательных изменений свойств объекта, то есть его техническое состояние. Это проявляется либо в ухудшении качества функционирования объекта, либо в потере объектом работоспособности.

Пусть в момент времени $t = 0$ элемент начинает работу, а в момент времени $t = \tau$ происходит отказ. Будем говорить, что τ – время жизни элемента. Полагая, что τ – непрерывная случайная величина на интервале $[0, \infty)$, получаем, что

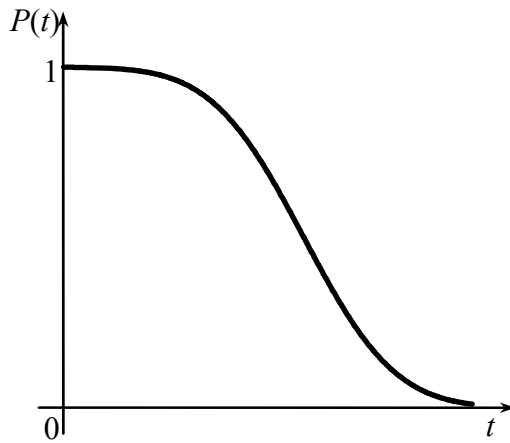
$$Q(t) = P\{\tau < t\}. \quad (2.1)$$

Функция $Q(t)$ – есть вероятность отказа элемента до момента времени t . Она полностью определяет надежность элемента.

Не менее часто употребляется и вероятность безотказной работы (ВБР) на интервале $[0, t]$. Так как отказ и работоспособность элемента события несовместные, то

$$P(t) = P\{t < \tau\} = 1 - Q(t). \quad (2.2)$$

Обычно функцию $P(t)$ называют функцией надежности. Примерный вид функции надежности показан на рис. 2.1.



Основные свойства функции $P(t)$:

- 1) $P(0) = 1$;
- 2) $P(\infty) \rightarrow 0$;
- 3) $P(t_2) \leq P(t_1)$ при $t_2 > t_1$.

Рис. 2.1. Функция надежности

Функция надежности имеет следующие очевидные свойства (вытекающие из свойств функции $Q(t)$):

- 1) $P(0)=1$ – полагаем, что в начальный момент времени (момент включения) элемент исправен;
- 2) $P(\infty) \rightarrow 0$ – элемент не может работать сколь угодно долго;
- 3) $P(t)$ – монотонно убывающая функция, т. е. $P(t_2) \leq P(t_1)$, при $t_2 > t_1$, что вполне естественно, ибо надежность работы элемента с течением времени не возрастает (но может быть постоянной).

Функцию $P(t)$ можно приближенно найти из опыта. Предположим сначала, что нам нужно найти значение этой функции при $t = T$, т. е. вероятность безотказной работы за времени T . Поставим на испытание N одинаковых элементов и испытываем их в одинаковых условиях время T . Пусть к моменту T не отказало n элементов из N . Тогда отношение $\frac{n}{N} = P^*(T)$ есть частота появления события, состоящего в безотказной работе элемента, и по теореме Бореля с вероятностью единица

$$P^*(T) = \frac{n}{N} \rightarrow P(T) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Практически при достаточно больших N

$$\frac{n}{N} \approx P(T).$$

Если мы хотим найти функцию $P(t)$ для всех значений $t \leq T$, то необходимо фиксировать моменты возникновения отказов элементов, а затем построить эмпирическую функцию надежности $P_N(t) = \frac{n(t)}{N}$. Очевидно, что это кусочно-

постоянная функция, имеющая скачки на величину $\frac{1}{N}$ в момент каждого отказа.

При увеличении N эта функция равномерно приближается к функции $P(t)$ и при больших N имеет место приближенное равенство $P_N(t) \approx P(t)$.

Важно отметить, что если испытания проводить на интервале времени $[0, T]$, то за границами интервала мы ничего сказать о функции $P(t)$ не можем, т. е. в общем случае ее нельзя экстраполировать. Правда, иногда из физических соображений или из предыдущих опытов известен вид зависимости $P(t)$, тогда, определив параметры этой функции по данным эксперимента на конечном интервале, мы сможем доопределить саму функцию на бесконечном интервале.

Для высоконадежных элементов за разумное время не удастся построить оценку функции $P(t)$ на требуемом интервале, поэтому применяются либо специальные методы испытаний, либо на основании изучения причин возникновения отказов выбирается теоретический вид функции $P(t)$ и ее параметры оцениваются по результатам эксперимента. Оценка параметров функции надежности по результатам опытов представляет собой самостоятельную задачу, ознакомиться с которой можно в [1].

Кроме функций $P(t)$ и $Q(t)$ (рис. 2.2), в качестве характеристики надежности часто используется функция $q(t)$ – плотность вероятности отказа (рис. 2.3):

$$q(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = -\frac{d}{dt}P(t),$$

$$Q(t) = \int_0^t q(\xi) d\xi.$$

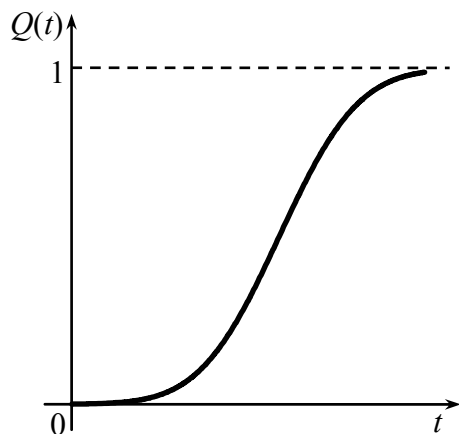


Рис. 2.2. Вероятность отказа



Рис. 2.3. Плотность вероятности отказа

Зная функцию $Q(t)$ или $q(t)$, можно найти вероятность отказа на любом интервале времени:

$$P\{t_1 < \tau < t_2\} = Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} q(\xi) d\xi.$$

Непосредственное дифференцирование оценок $P(t)$ и $Q(t)$ является непригодным способом для определения оценки $q(t)$. Для оценивания функции $q(t)$ используется гистограмма.

В связи с большим объемом испытаний, необходимых для определения полных характеристик надежности $P(t)$, $Q(t)$ или $q(t)$, во многих случаях предпочитают определять числовые характеристики (моменты) случайной величины τ (времени жизни элемента).

Важнейшим из них является среднее время безотказной работы (СВБР) или среднее время жизни элемента, определяемое как математическое ожидание случайной величины τ :

$$T_0 = M[\tau] = \int_0^{\infty} tq(t)dt. \quad (2.3)$$

Возьмем этот интеграл по частям:

$$T_0 = \int_0^{\infty} tq(t)dt = - \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt} P(t)dt = - \int_0^{\infty} t dP(t) = - tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t)dt. \quad (2.4)$$

Предположим, что $P(t)$ при $t \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{t}$, что выполняется для всех употребительных законов распределения функций надежности. Тогда

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t)dt. \quad (2.5)$$

Из этой формулы видно, что среднее время безотказной работы численно равно площади, ограниченной функцией надежности $P(t)$ и осями координат.

Среднее время жизни T_0 может быть найдено и непосредственно по результатам испытаний. Для этого необходимо N элементов испытывать до отказа последнего из них. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – времена жизни этих элементов. Известно [1], что для определения математического ожидания целесообразно использовать оценку вида

$$T_0^* = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i}{N}, \quad (2.6)$$

которая удовлетворяет свойствам несмещенности, ибо $M[T_0^*] = T_0$, и состоятельности, ибо $\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|T_0 - T_0^*| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, при большом N имеет место приближенное равенство $T_0^* = T_0$.

Практически испытания до последнего отказа провести не удастся, ибо время испытаний всегда ограничено. Пусть за время испытаний t при испытании N элементов произошло n отказов в моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Используем оценку вида

$$\tilde{T} = \left[\sum_{i=1}^n \tau_i + (N - n)t \right] / N. \quad (2.7)$$

Поскольку $\frac{(N-n)t}{N} < \frac{\sum_{i=n+1}^N \tau_i}{N}$, то $\tilde{T} < T^*$ и, следовательно, оценивает среднее время жизни T_0 снизу. Естественно, пользоваться такой оценкой целесообразно, если n близко к N .

Среднее время безотказной работы является одной из наиболее наглядных характеристик надежности. Однако этой характеристике свойственны обычные недостатки среднего значения, и для расширения знаний о случайном времени жизни элемента целесообразно ввести в рассмотрение моменты высших порядков, например, дисперсию времени жизни:

$$D[\tau] = M[(\tau - T_0)^2] = M[\tau^2] - T_0^2 = \int_0^{\infty} t^2 q(t) dt - T_0^2. \quad (2.8)$$

Величина $\sigma[\tau] = \sqrt{D[\tau]}$ дает среднеквадратическое отклонение случайного времени жизни τ от своего среднего значения T_0 .

Дисперсию времени безотказной работы можно оценить и по результатам опыта. Используя прежние обозначения, запишем несмещенную и состоятельную оценку дисперсии в виде

$$D[\tau] \approx D^*[\tau] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\tau_i - T^*)^2. \quad (2.9)$$

Укажем, в заключение, способ экспериментальной оценки плотности вероятности отказа $q(t)$. Для этого интервал наблюдения t разбиваем на некоторые малые интервалы Δt и регистрируем число отказов n_k , попавшее в каждый интервал. Эмпирическая функция плотности вероятности (гистограмма) выражается формулой

$$q_N(t) = \frac{n_k}{N \Delta t} \quad \text{при } (k-1)\Delta t < t < k\Delta t. \quad (2.10)$$

При большом объеме испытаний и достаточно малых Δt оценка $q_N(t) \approx q(t)$.

Отметим, что плотность вероятности отказов, согласно формуле (2.10), можно интерпретировать как частоту отказов, приходящихся на один элемент, в единицу времени. Частота отказов является наряду с функцией надежности наиболее полной характеристикой элемента, работающего до полного отказа. Среднее время безотказной работы и другие характеристики легко вычислить, если известна частота отказа. Соответствующие рекомендации по выбору числа интервалов и объему выборки можно найти в [6].

Перейдем теперь к рассмотрению важной и очень популярной характеристики надежности, которую чаще всего называют функцией интенсивности (ФИ) отказа. Решим следующую задачу: пусть элемент безотказно работает на интервале $[0, t]$. Какова вероятность того, что он не откажет на интервале $t, t + \Delta t$? Обозначим эту

вероятность через $P(t, t + \Delta t)$. Пусть A – событие, обозначающее безотказную работу элемента на участке $[0, t]$, а B – событие, означающее безотказную работу на $[t, t + \Delta t]$. Тогда искомая вероятность есть условная вероятность:

$$P(t, t + \Delta t) = P\left\{\frac{B}{A}\right\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}. \quad (2.11)$$

Но событие AB означает безотказную работу на интервале $[0, t + \Delta t] = [0, t_1]$, поэтому

$$P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t_1)}{P(t)} = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)},$$

а вероятность отказа на $t + \Delta t$:

$$Q(t, t + \Delta t) = 1 - P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t) - P(t_1)}{P(t)}. \quad (2.12)$$

Устремляя Δt к нулю, с точностью до бесконечно малой высшего порядка получаем

$$Q(t, t + \Delta t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \Delta t + O(\Delta t). \quad (2.13)$$

Введем обозначение $-\frac{P'(t)}{P(t)} = \lambda(t)$ и назовем $\lambda(t)$ функцией интенсивности отказа. Из формулы (2.13) видно, что

$$Q(t, t + \Delta t) \approx \lambda(t) \Delta t, \quad (2.14)$$

а величина $\lambda(t)$ является локальной характеристикой надежности изделия и означает плотность вероятности того, что элемент, исправно работавший на интервале $[0, t]$, откажет в последующий малый (бесконечно малый) промежуток Δt .

Легко установить связь между функцией интенсивности отказа и функцией надежности. Действительно,

$$\lambda(t) = -\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt}, \text{ откуда } \lambda(t) dt = -\frac{1}{P(t)} dP(t) \text{ или, интегрируя с учетом } P(0) = 1, \\ \int_0^t \lambda(t) dt = -\ln P(t), \text{ получаем}$$

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right). \quad (2.15)$$

Отсюда для частоты отказов

$$q(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right). \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.15) следует, что вероятность безотказной работы на интервале $[t_1, t_2]$ находится как

$$P(t_1, t_2) = \exp \left(- \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right). \quad (2.17)$$

Функцию интенсивности отказов можно определить по результатам эксперимента следующим образом:

$$\lambda(t) = - \frac{P'(t)}{P(t)} \approx \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(t)} \approx \frac{\frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{N}}{\Delta t \cdot \frac{n(t)}{N}} = \frac{\Delta n}{\Delta t \cdot n(t)} = \lambda^*(t), \quad (2.18)$$

где Δn – число отказов на участке $[t, t + \Delta t]$, а $n(t)$ – число элементов, не отказавших к моменту t . Если Δt достаточно мало, Δn при этом велико, то $\lambda^*(t)$ может быть принята в качестве оценки функции интенсивности.

Типичная зависимость функции интенсивности имеет характерный вид, показанный на рис. 2.4.

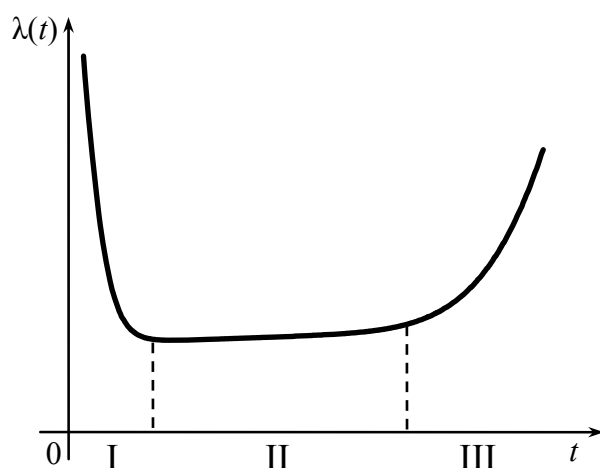


Рис. 2.4. Функция интенсивности:
I – участок приработки;
II – участок нормальной эксплуатации;
III – старение элемента

Физически такой вид зависимости $\lambda(t)$ объяснить просто. На участке I происходит основное количество отказов, связанное с приработкой изделий и выявлением скрытых отказов. Это участок приработки (“детства” элемента).

На участке II, называемом участком нормальной эксплуатации (“зрелость” элемента), интенсивность отказов невелика и мало изменяется, но, вообще говоря, возрастает. Участок III характеризует период старения (“старость” элемента). Здесь интенсивность отказов снова резко возрастает, что объясняется необратимыми физико-химическими процессами в элементе.

Естественно, что эта кривая (см. рис. 2.4) не является универсальной. Например, хорошо поставленный контроль приводит к сильному сокращению или даже отсутствию периода приработки. Есть сведения, что для некоторых элементов (например, для интегральных схем) функция интенсивности на участке нормальной работы убывающая.

Поскольку для большинства систем эксплуатация начинается после предварительной тренировки, настройки и регулировки, то можно сказать, что наиболее интересным для изучения является участок II, так как работа на участке III обычно не допускается, и элемент заменяется ранее, чем он начинает заметно стареть.

2.2. Типовые законы надежности

2.2.1. Экспоненциальный закон

Зачастую, идеализируя реальную картину функции интенсивности, полагают, что на участке нормальной эксплуатации

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const}. \quad (2.19)$$

Как следует при этом из формулы (2.15):

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda dt\right) = e^{-\lambda t}, \quad (2.20)$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ а } q(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.21)$$

Тогда среднее время жизни определяется как

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

поэтому
$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_0}}. \quad (2.22)$$

Можно сказать, что T_0 – это время, за которое вероятность безотказной работы уменьшается в e раз.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение времени жизни:

$$D[\tau] = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - T_0^2 = T_0^2, \quad \sigma[\tau] = T_0. \quad (2.23)$$

Таким образом, при экспоненциальном законе надежности среднеквадратическое время безотказной работы равно его математическому ожиданию. Это свойство экспоненциального закона позволяет считать, что в данном случае среднее время безотказной работы является достаточно полной характеристикой надежности. Кроме того, это свойство на практике может быть использовано для проверки гипотезы о существовании экспоненциального закона надежности. Если статистическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение близки по величине, это может служить выводом о правдоподобности принятой гипотезы.

Для реального элемента T_0 не является действительным средним временем жизни и по той причине, что вне участка нормальной эксплуатации функция ин-

тенсивности изменяется. Поэтому более корректно сказать, что для экспоненциального закона T_0 – это среднее время работы некоторого гипотетического элемента, функция интенсивности отказа которого постоянна на бесконечном интервале времени, а на рассматриваемом участке совпадает с интенсивностью отказа изучаемого элемента.

Часто интересующее нас время значительно меньше среднего времени работы $t \ll T_0$, тогда можно воспользоваться более простыми приближенными формулами, которые дают нижнюю оценку соответствующих вероятностей:

$$P(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, \quad Q(t) \approx \frac{t}{T_0}. \quad (2.24)$$

Популярность экспоненциального закона в теории надежности объясняется тем, что он часто имеет физическое обоснование и прост для теоретических исследований. Основное свойство элемента с экспоненциальным законом надежности заключается в том, что вероятность безотказной работы на интервале $[t, t + \Delta t]$ не зависит от времени предшествующей работы элемента t , а зависит только от длины интервала Δt . Т. е., если известно, что в данный момент элемент исправен, то будущее его поведение не зависит от прошлого. Согласно (2.11) имеем

$$P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda(t + \Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Это свойство является характеристическим, т. е., если оно выполняется для некоторого закона $P(t)$, то этот закон обязательно является экспоненциальным. Графические зависимости, отражающие основные характеристики экспоненциального закона, приведены на рис. 2.5.

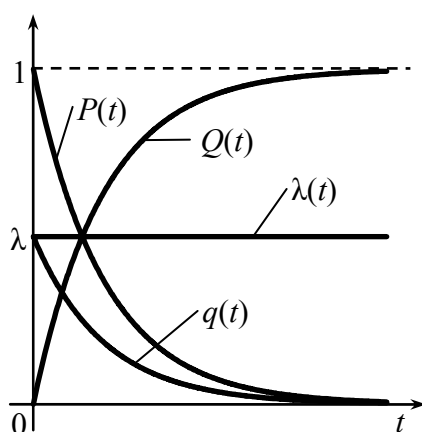


Рис. 2.5. Характеристики экспоненциального закона надежности

Экспоненциальный закон распределения является типичным для радиоэлектронных компонентов, например, резисторов, конденсаторов и т. п. Но часто этот закон применяется некритически и единственным оправданием в его пользу служит то, что с этим законом проще решать задачу, а без него она в общем случае неразрешима. По-видимому, применимость экспоненциального закона зависит, в основном, от характера отказов элемента. Внезапные отказы, носящие случайный характер (например, пробой конденсаторов, обрыв сопротивлений и т. п.), обычно

довольно широко описываются экспоненциальным законом. Отказы, возникающие в результате износа и необратимых физико-химических изменений параметров, не подчиняются экспоненциальному закону. Эти отказы, носящие название постепенных (параметрических) во многих случаях хорошо описываются следующими законами.

2.2.2. Нормальный закон

Рассмотрим одну достаточно общую модель, которая приводит к нормальному закону надежности. Пусть надежность элемента определяется некоторым параметром α_0 , например, величиной сопротивления, коэффициентом усиления и т. п. Допустим, что начальное значение α_0 – есть случайная величина, вызванная производственным разбросом. В силу большого количества причин, вызвавших технологический разброс параметра, можно предположить, что закон распределения случайной величины α_0 – нормальный.

Во время работы элемента параметр α_0 меняется некоторым образом (например, от нагрева), причем можно указать эту зависимость:

$$\alpha = f(t, \alpha_0).$$

Момент отказа элемента $t = \tau$ определяется из равенства

$$\alpha_1 = f(\alpha_0, \tau),$$

где α_1 – критическое (предельное) значение параметра α_0 . Предполагая для простоты функцию f монотонной (практически это часто имеет место), получаем

$$\tau = \varphi(\alpha_0, \alpha_1),$$

где φ – функция, обратная f по аргументу t . Раскладывая эту функцию в ряд Тейлора в точке $M[\alpha_0]$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$\tau = \varphi(m_{\alpha_0}, \alpha_1) + \varphi'_{\alpha_0}(m_{\alpha_0}, \alpha_1)(\alpha_0 - m_{\alpha_0}).$$

Отсюда видно, что если α_0 имеет нормальный закон распределения, то и время жизни τ , как линейная функция от α_0 , также имеет нормальное распределение.

Поскольку время работы аппаратуры не может быть меньше нуля, то в теории надежности имеет смысл рассматривать лишь усеченный нормальный закон распределения, плотность вероятности отказов для которого определяется для положительных значений аргумента:

$$q(t) = \begin{cases} C e^{-\frac{(t-T_1)^2}{2\sigma^2}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки $\int_0^{\infty} q(t) dt = 1$, откуда

$$C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)\right]}, \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Обычно для реальных элементов $\sigma \ll T_1$ и $C \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (уже для $\sigma = \frac{1}{3}T_1$ $\Phi(3)=0,4986$).

Функция надежности для нормального закона

$$\begin{aligned} P(t) &= 1 - \int_0^t q(\tau) d\tau = 1 - C \int_0^t e^{-\frac{(\tau-T_1)^2}{2\sigma^2}} d\tau = \\ &= 1 - C\sigma \int_{-\frac{T_1}{\sigma}}^{\frac{t-T_1}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - C\sigma\sqrt{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t-T_1}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив значение C , получим

$$P(t) = \frac{\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t-T_1}{\sigma}\right)}{\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)} = \frac{1 - 2\Phi\left(\frac{t-T_1}{\sigma}\right)}{1 + 2\Phi\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)}. \quad (2.26)$$

При $\sigma \ll T_1$ получаем, что $P(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-T_1}{\sigma}\right)$. В частности, при $t=0$ $P(t)=1$.

Функция интенсивности отказов

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{q(t)}{P(t)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{(\tau-T_1)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \left[1 - 2\Phi\left(\frac{t-T_1}{\sigma}\right) \right]}. \quad (2.27)$$

В частности, при $t=0$ и $\sigma \ll T_1$ получаем, что $\lambda(0) \approx 0$. Физически это условие означает, что элемент, подверженный старению, практически не имеет скрытых отказов.

Графические зависимости, отражающие основные характеристики нормального закона, показаны на рис. 2.6.

Из рис. 2.6 видно, что интенсивность отказов вначале весьма мала, но с течением времени сильно растет, вероятность безотказной работы быстро уменьшается. Следовательно, можно сделать вывод, что из элементов, имеющих нормальный закон распределения надежности, целесообразно строить системы, предназначенные для нормального времени работы.

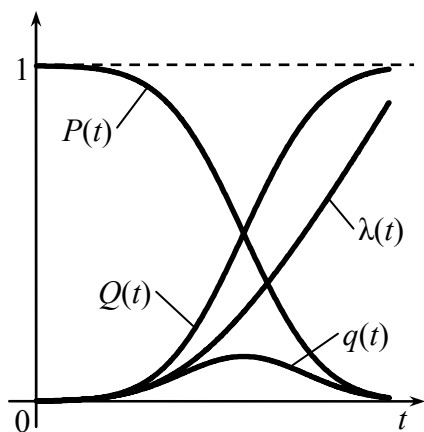


Рис. 2.6. Характеристики
усеченного нормального
закона надежности

Усеченное нормальное распределение широко применяется при анализе надежности с учетом уходов параметров за поле допуска. Кроме усеченного нормального закона применяется и логарифмическое нормальное распределение (лог-нормальное). При этом используют нормальное распределение для величины $\log t$. Характеристики надежности при этом качественно такие же, как и для усеченного нормального закона [6].

2.2.3. Закон Вейбулла

Функция надежности для закона Вейбулла имеет следующий вид:

$$P(t) = e^{-\lambda t^\alpha}. \quad (2.28)$$

Для малых t ($\lambda t^\alpha \ll 1$) $P(t) \approx 1 - \lambda t^\alpha$. Соответственно, плотность вероятности отказов

$$q(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha};$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{P(t)} = \lambda \alpha t^{\alpha-1}. \quad (2.29)$$

По-видимому, основной причиной широкого применения закона Вейбулла в теории надежности является то, что он, обобщая экспоненциальный закон, содержит дополнительный параметр α . Подбирая нужным образом параметры λ и α , можно точнее аппроксимировать экспериментальные законы надежности. Соответствующие графики основных характеристик надежности для вейбулловского закона показаны на рис. 2.7.

Анализ рис. 2.7 подтверждает соображение о широких возможностях закона Вейбулла. Например, элемент, который часто имеет скрытые отказы, но не “стареет” хорошо описывается вейбулловским законом при $\alpha < 1$. Наоборот, элемент, который почти не имеет скрытых дефектов, но быстро “стареет”, имеет функцию надежности, хорошо приближающуюся к вейбулловской при $\alpha > 1$. В частности, при $\alpha = 2$ получаем релейский закон распределения:

$$P(t) = e^{-\lambda t^2}, \quad q(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2}, \quad \lambda(t) = 2\lambda t. \quad (2.30)$$

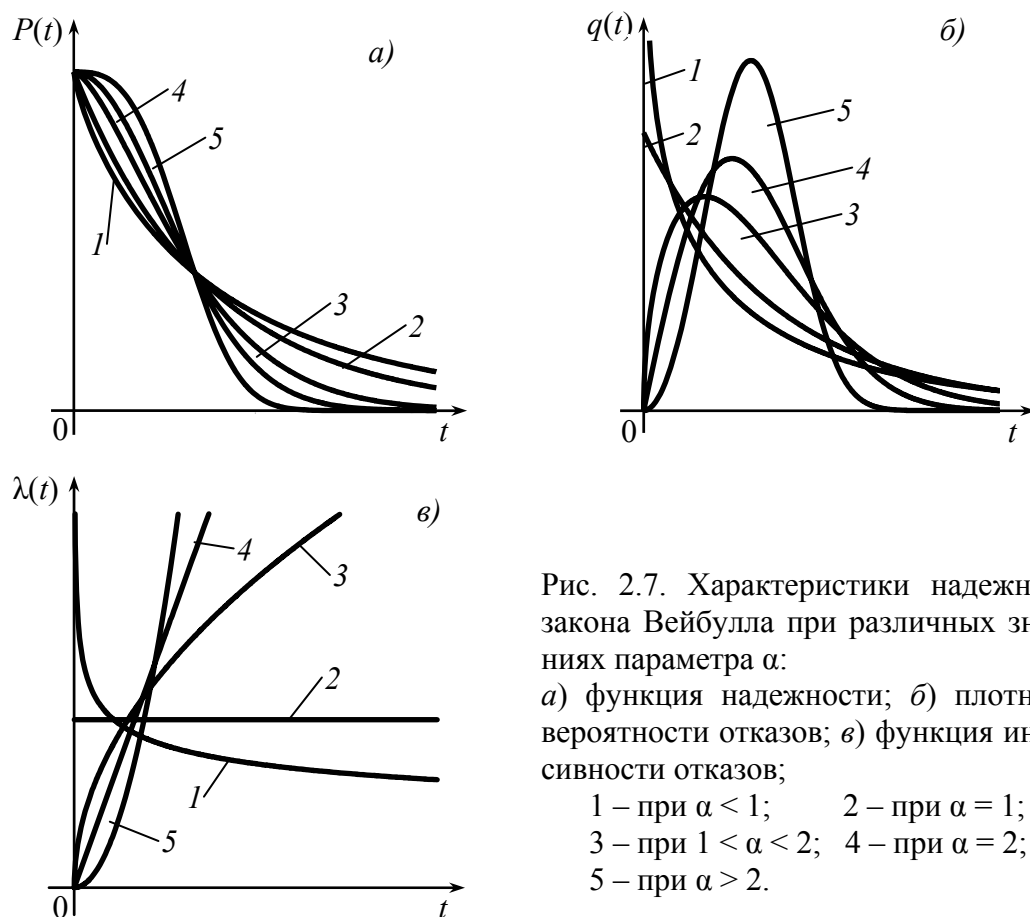


Рис. 2.7. Характеристики надежности закона Вейбулла при различных значениях параметра α :
 а) функция надежности; б) плотность вероятности отказов; в) функция интенсивности отказов;
 1 – при $\alpha < 1$; 2 – при $\alpha = 1$;
 3 – при $1 < \alpha < 2$; 4 – при $\alpha = 2$;
 5 – при $\alpha > 2$.

Интенсивность отказов элемента, надежность которого подчиняется закону Релея, линейно нарастает во времени. Это означает, что этот элемент интенсивно стареет. Закон Релея часто описывает надежность электровакуумных элементов.

Общее распределение Вейбулла находит основное применение при анализе надежности механических элементов типа шарикоподшипников, электромеханических элементов типа реле, электронных ламп.

Другие типовые законы надежности подробно рассмотрены в [1, 6].

2.3. Суперпозиция законов распределения

Рассмотренные законы надежности могут характеризовать, каждый по отдельности, надежность работы элемента только на ограниченном интервале времени. Например, гамма-распределение – на участке приработки, экспоненциальное – на участке нормальной работы, а вейбулловское или усеченное нормальное – на участке старения (см. рис.2.4). Поэтому для анализа надежности работы элемента на длительном интервале эксплуатации целесообразно использовать суперпозицию рассмотренных законов распределения, т. е. линейные комбинации вида

$$P(t) = \sum_{i=1}^n C_i P_i(t),$$

где C_i – нормирующие множители, подчиняющиеся условию: $\sum_{i=1}^n C_i = 1$; $P_i(t)$ – типовые законы надежности.

В качестве примера рассмотрим суперпозицию двух экспоненциальных законов. Пусть вероятность безотказной работы определяется выражением

$$P(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad C_1 + C_2 = 1. \quad (2.31)$$

Тогда плотность вероятности и интенсивность отказов имеют вид

$$q(t) = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t},$$

$$\lambda(t) = \frac{C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}} = \frac{C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{C_1 + C_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}, \quad (2.32)$$

а среднее время безотказной работы

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}. \quad (2.33)$$

Полученная функция интенсивности уже не является постоянной (как для экспоненциального закона надежности слагаемых). Поэтому, подбирая параметры λ_1 и λ_2 , можно добиться желаемой кривой общей функции интенсивности. Например, при $\lambda_2 > \lambda_1$ получаем:

$$\lambda(0) = \frac{C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2}{C_1 + C_2} = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2, \quad \lambda(\infty) = \lambda_1, \quad \lambda(0) > \lambda(\infty).$$

Графики основных характеристик надежности для этого случая показаны на рис. 2.8, из которого видно, что закон распределения, полученный в результате суперпозиции экспоненциальных законов, может характеризовать надежность элемента с учетом периода приработки (участки I и II, см. рис. 2.4).

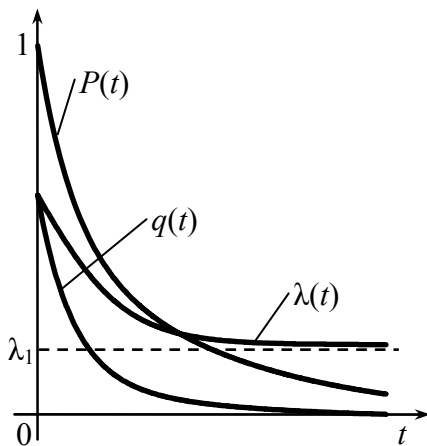


Рис. 2.8. Характеристики надежности суперпозиции двух экспоненциальных законов при $\lambda_2 > \lambda_1$

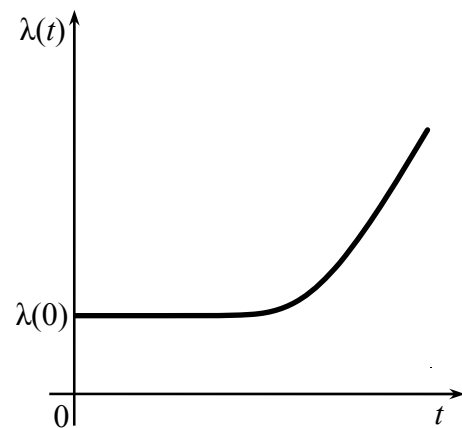


Рис. 2.9. Функция интенсивности отказов при суперпозиции экспоненциального и нормального законов надежности

Аналогичные рассуждения можно проделать и для остальных законов распределения. Например, при суперпозиции экспоненциального и нормального законов надежности получается функция интенсивности, вид которой показан на рис. 2.9. В области малых времен интенсивность отказов постоянна, а при росте t она возрастает, что соответствует возникновению отказов в результате старения (см. рис. 2.4, участки II и III).

Довольно интересным является также использование одного закона распределения, например, Вейбулла, с переменным параметром α , но данная идея сопряжена со значительными математическими трудностями.

2.4. Оценка надежности элемента

Оценка надежности целесообразна в том случае, когда в распоряжении нет полной информации об объекте (например, закон надежности элемента). В зависимости от условий можно строить нижнюю, верхнюю или обе оценки для различных характеристик надежности (рис. 2.10). Чаще всего ограничиваются построением нижней оценки для вероятности безотказной работы, применение которой дает некоторый запас при расчетах надежности.

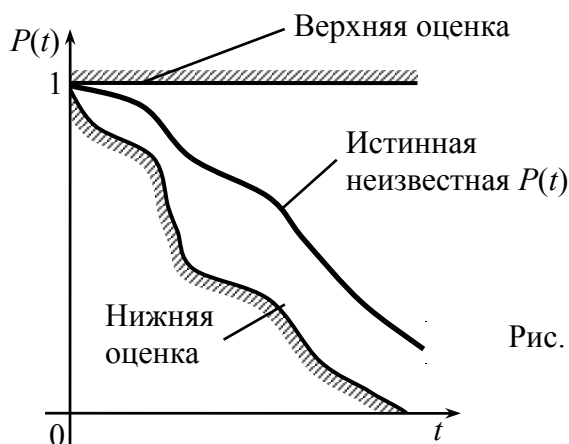


Рис. 2.10. К понятию оценки надежности элемента

В тоже время, ситуация, при которой известными являются только числовые характеристики надежности, достаточно широко распространена. В этом случае возникает ситуация статистической неопределенности, и оценки характеристик надежности могут быть найдены на основе принципа получения гарантированного результата (отыскание наихудшего закона при заданной информации). Например, если известны математическое ожидание $T_0 = M[\tau]$ и дисперсия $D_0 = D[\tau]$ случайного времени жизни τ (или их оценки), то справедлива оценка вероятности безотказной работы $P(t)$ Ю.Б. Гермейера:

$$P^*(t) = \begin{cases} \frac{(T_0 - t)^2}{(T_0 - t)^2 + D_0} & \text{при } t < T_0, \\ 0 & \text{при } t \geq T_0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Оценка надежности по формуле (2.34) является нижней, т. е. любая теоретическая функция надежности $P(t)$ с параметрами T_0 и D_0 лежит выше, чем $P^*(t)$:

$$P(t) \geq P^*(t).$$

Данная оценка для большинства законов надежности является весьма грубой, что объясняется малой исходной информацией об элементе. Например, на рис. 2.11 показана оценка Гермейера и функция надежности для экспоненциального закона ($T_0 = \frac{1}{\lambda}$, $D_0 = \frac{1}{\lambda^2} = T_0^2$).

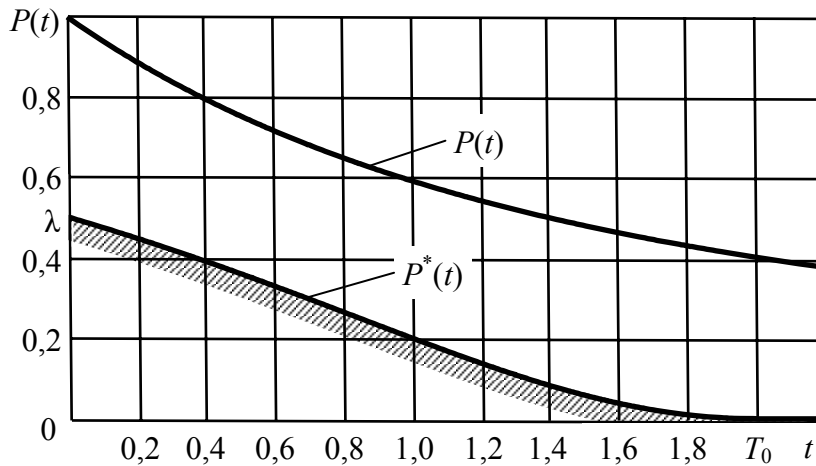


Рис. 2.11. Оценка Гермейера $P^*(t)$ и функция надежности экспоненциального закона $P(t)$ при $\lambda = 0,5$

Рассмотрим другой, более общий, подход к изучению надежности элемента, базирующийся на дополнительной информации и позволяющий получить более точную оценку надежности по сравнению, например, с (2.34). Пусть известны среднее время безотказной работы T_0 и функция интенсивности отказов $\lambda(t)$.

Большинство реальных элементов являются стареющими, т. е.

$$\lambda(t_2) \geq \lambda(t_1), \quad t_2 > t_1.$$

Это означает, что с течением времени надежность элемента не может улучшаться (участок II и III, см. рис. 2.4).

Построим оценку для вероятности безотказной работы $P(t)$. Известно (2.15), что $P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$. Введем обозначение:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (2.35)$$

Тогда $P(t) = e^{-\Lambda(t)}$. В силу свойств функции $\lambda(t)$ (непрерывная, неотрицательная, неубывающая) функция $\Lambda(t)$ является непрерывной, неотрицательной, монотонно возрастающей, однозначной, выпуклой вниз (рис. 2.12). Поэтому для нее всегда существует обратная функция $\phi(x)$:

$$\Lambda(t) = x, \quad \Lambda^{-1}(t) = \varphi(x) = t, \quad \Lambda(t) = \varphi^{-1}(x). \quad (2.36)$$

Так как функция $\Lambda(t)$ выпукла вниз, функция $\varphi(x)$ выпукла вверх (рис. 2.13).

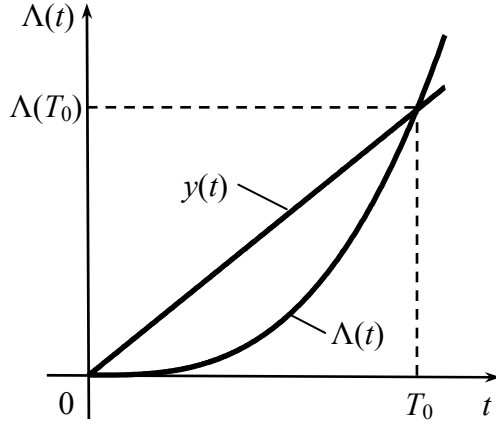


Рис. 2.12. Функция $\Lambda(t)$ и
хорда $y(t) = \frac{t}{T_0} \Lambda(T_0)$

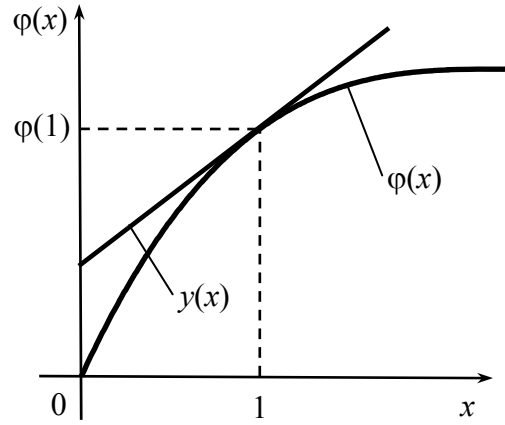


Рис. 2.13. Функция $\varphi(x)$
и касательная $y(x) = \varphi'(1)(x - 1)$

Найдем оценку среднего времени безотказной работы T_0 . Согласно (2.3, 2.35),

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda(t)} dt.$$

Производя замену переменной (2.36) и интегрируя по частям, получим точную формулу для среднего времени безотказной работы T_0 :

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} d\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx. \quad (2.37)$$

Так как функция $\varphi(x)$ неизвестна, то построим ее оценку. Функция $\Lambda(t)$ выпукла вниз, то обратная ей функция $\varphi(x)$ выпукла вверх (см. рис. 2.13), поэтому ее график лежит ниже касательной, проведенной в любой точке. В частности, при любом x

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) + \varphi'(1)(x - 1), \quad (2.38)$$

где $y(x) = \varphi'(1)(x - 1)$ – уравнение касательной к функции $\varphi(x)$ в точке $x = 1$.

Учитывая это неравенство, получаем верхнюю оценку среднего времени:

$$\begin{aligned} T_0 &\leq \int_0^{\infty} e^{-x} [\varphi(1) + \varphi'(1)(x - 1)] dx = \varphi(1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx + \varphi'(1) \int_0^{\infty} (x - 1) e^{-x} dx = \\ &= \{ \text{интегрируем второе слагаемое по частям} \} = \varphi(1) \left[-e^{-x} \Big|_0^{\infty} \right] + \\ &+ \varphi'(1) \left[-xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right] = \varphi(1). \end{aligned}$$

Итак,

$$T_0 \leq \varphi(1), \text{ а значит } \Lambda(T_0) \leq 1. \quad (2.39)$$

В частности, если для оценки среднего времени безотказной работы использовать гипотезу об экспоненциальном законе распределения на всем интервале, то

$$(\lambda = \text{const}) \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda dt = \lambda t \text{ и}$$

$$\Lambda(T_0) = \lambda T_0 \leq 1 \text{ или } T_0 \leq \frac{1}{\lambda} = T_{0 \text{ эксп. закона}}. \quad (2.40)$$

Таким образом, верхней оценкой истинного среднего времени безотказной работы стареющего элемента (неубывающая функция интенсивности отказов) с произвольным законом надежности является среднее время для экспоненциального закона надежности.

Поскольку функция $\Lambda(t)$ является выпуклой вниз, то ее график на интервале $[0, T_0]$ лежит ниже хорды, за исключением двух точек (границ интервала, см. рис. 2.12). Поэтому, учитывая (2.39), получаем

$$\Lambda(t) \leq \frac{\Lambda(T_0)}{T_0} t \leq \frac{t}{T_0}, \text{ при } t \in [0, T_0]. \quad (2.41)$$

Из последнего неравенства следует, что

$$P(t) = e^{-\Lambda(t)} \geq e^{-\frac{t}{T_0}}, \text{ при } t \in [0, T_0]. \quad (2.42)$$

Отсюда можно сделать вывод, что если для оценки надежности стареющего элемента пользоваться экспоненциальным законом с истинным средним временем безотказной работы, то получается нижняя оценка истинной функции надежности для всех моментов времени, не превосходящих T_0 (рис. 2.14). Это позволяет в условиях неопределенности, располагая только величиной T_0 , использовать для оценки надежности экспоненциальный закон (что говорит в пользу применимости этого закона), при этом у реального элемента надежность будет выше.

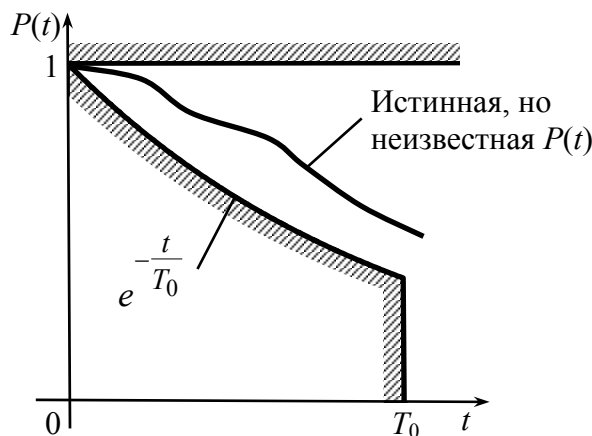


Рис. 2.14. Применение экспоненциального закона для оценки надежности элемента

Нижняя оценка вероятности безотказной работы $P(t)$ более применима, чем верхняя, ибо прогнозы надежности, сделанные по заниженным вероятностям, в действительности будут оправдываться с большей достоверностью. Естественно, если кроме среднего времени жизни известны и моменты высших порядков, то оценки надежности (как нижнюю, так и верхнюю) можно уточнить [7, 11].

2.5. Выбор типа теоретического распределения наработки до первого отказа

Наработка на отказ есть продолжительность или объем работы изделия, измеряемые в часах, километрах, гектарах, кубометрах, циклах и т. п. в зависимости от того, какой показатель функционирования изделия является наиболее удобным. Для систем типа САУ и АСУ наработка на отказ обычно измеряется в часах.

В настоящее время не существует общепринятого физического толкования применяемых законов распределения наработки до первого отказа, но независимо от особенностей системы для анализа ее надежности всегда необходимо подобрать подходящее описание функции надежности. Возможны два пути решения этой задачи.

Если вид распределения неизвестен, то одним из путей его получения является аппроксимация эмпирической функции распределения, которая просто удовлетворительно описывает результаты испытаний (рис. 2.15, а). Но непосредственное использование экспериментальных данных без априорного представления о виде закона распределения требует больших массивов информации, получение которых практически невозможно. Реально за время эксплуатации или испытаний успевают отказать незначительная часть испытываемых объектов, т. е. получаемым статистическим данным соответствует только левая ветвь распределения. Поэтому значения числовых характеристик надежности сильно зависят от типа предполагаемого распределения. К тому же, этот путь позволяет строить модели, имеющие лишь смысл индивидуальных характеристик надежности, и их распространение на другие объекты не всегда возможно.

В этих условиях для выбора распределения наработки на отказ целесообразно использовать информацию об условиях, в которых возникают те или иные типы распределений, т. е. необходимо знать, в результате каких физических процессов появляются те или иные распределения. Иначе говоря, выбранному теоретическому распределению должна соответствовать определенная физическая модель отказов.

При таком подходе экспериментальные данные служат средством проверки правильности применяемой гипотезы о виде распределения. Это обеспечивает возможность обоснованного подхода к дальнейшим расчетам надежности системы и получения правильных выводов и рекомендаций по ее повышению.

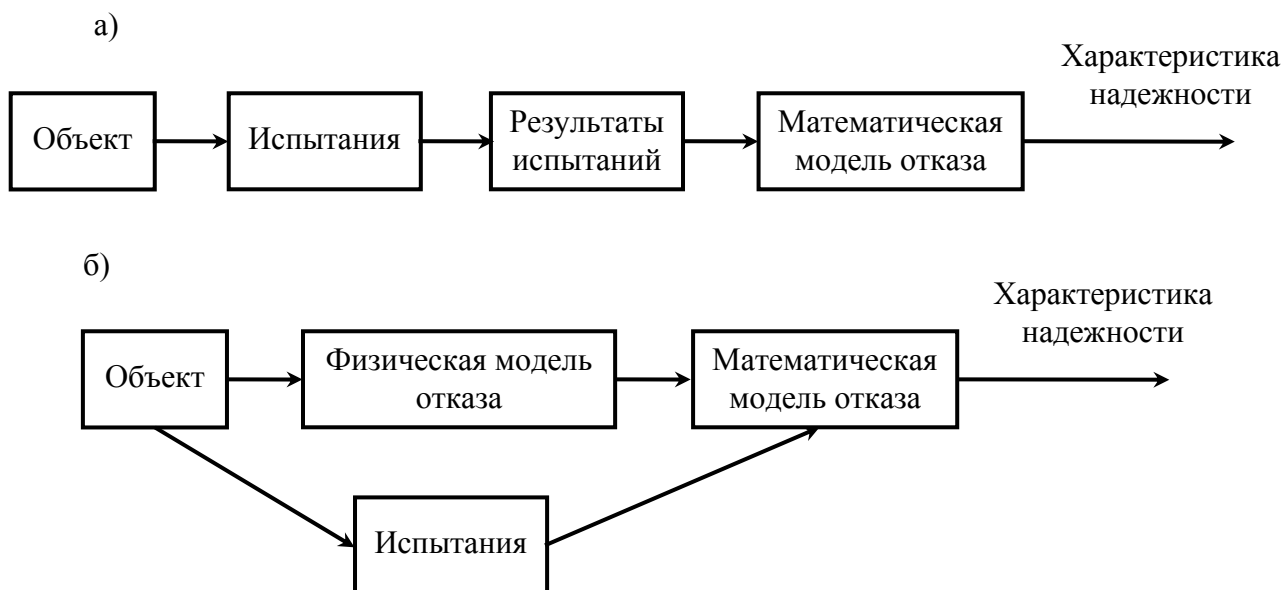


Рис. 2.15. Пути определения характеристик надежности

В то же время получить расчетным (теоретическим) путем параметры распределения не всегда удастся. Следовательно, это путь также сопровождается экспериментальными исследованиями для оценивания параметров распределения, хотя объем экспериментов значительно уменьшается (рис. 2.15, б). К тому же использование второго подхода осложняется, если процессы, протекающие в элементе, сложны для исследования. Данный подход применяется в основном для простых элементов типа радиоэлектронных компонентов и механических деталей (пластины, оси). Сложные элементы в этом случае целесообразно рассматривать как систему, состоящую из простых элементов, и рассчитывать ее надежность, зная характеристики надежности простых элементов.

3. НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Предположим, что элемент может находиться в одном из двух состояний – работоспособность или отказ. Во многих случаях отказавший элемент подвергается *восстановлению*, под которым обычно понимают процесс, в результате которого отказавший элемент вновь приобретает первоначальные характеристики надежности. Это достигается либо заменой элемента на работоспособный (запасной), либо ремонтом отказавшего элемента (считаем, что и после ремонта характеристики надежности элемента те же, что и до отказа).

В зависимости от времени, затраченного на восстановление, различают два случая:

1) среднее время восстановления T_v элемента много меньше среднего времени его жизни T_0 ($T_v \ll T_0$);

2) среднее время восстановления сопоставимо со средним временем жизни элемента ($T_v \approx T_0$).

В первом случае в первом приближении можно считать $T_v \approx 0$ и рассматривать процесс с мгновенным восстановлением (что значительно упрощает анализ надежности), а во втором – приходится рассматривать процесс с конечным временем восстановления.

3.1. Надежность элемента с мгновенным восстановлением

3.1.1. Основные характеристики процесса восстановления

Рассмотрим граф работы элемента с мгновенным восстановлением (рис. 3.1). Процесс восстановления протекает следующим образом. Считаем, что в момент времени $t = 0$ элемент (работоспособный) включается в работу и функционирует некоторое время τ_1 . В случайный момент $t = t_1$ элемент отказывает, мгновенно восстанавливается (заменяется новым) и, проработав время τ_2 , вновь выходит из строя и т. д. Этот процесс продолжается неограниченно.

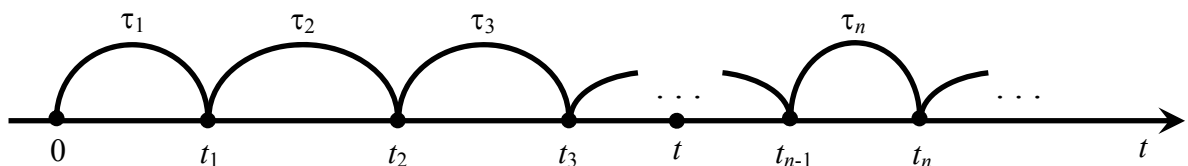


Рис. 3.1. Процесс с мгновенным восстановлением

Считаем, что промежутки времени (времена жизни) τ_i образуют последовательность *независимых* (предположение) непрерывных случайных величин, имеющих одинаковые законы распределения

$$F(t) = P\{\tau_i < t\} \text{ для } \forall i,$$

плотности вероятности

$$f(t) = \int_0^t F(\xi) d\xi$$

и конечные моменты 1-го и 2-го порядков (что достаточно очевидно): $T_0 = M[\tau_i]$, $\sigma^2 = D[\tau_i]$.

Допущения о законах выполняются достаточно точно при замене отказавших элементов на новые однотипные элементы и приближенно – при замене на отремонтированные элементы.

Моменты отказов (или восстановлений) t_i образуют некоторый случайный поток (последовательность случайных величин, рис. 3.1)

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1; \\ t_2 = \tau_1 + \tau_2; \\ t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; \\ \dots \\ t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n; \\ \dots, \end{cases} \quad (3.1)$$

который является математической моделью процесса восстановления. Точки t_i называются событиями этого потока. Изучение процесса восстановления сводится к вычислению некоторых характеристик этого потока. Чаще всего интересуются числом отказов $v(t)$ на интервале. Очевидно, что $v(t)$ является дискретной случайной величиной, принимающей только целые и неотрицательные значения.

Найдем распределение случайной величины $v(t)$, т. е. вероятность того, что на интервале $[0, t]$ будет не менее n отказов:

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{t_n < t\} = P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n < t\} = F_{(n)}(t). \quad (3.2)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению закона распределения суммы случайных величин τ_i , которая в общем случае решается достаточно сложно. В предположении о независимости слагаемых решение значительно упрощается.

Плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин $t = \tau_1 + \tau_2$ можно найти как свертку плотностей вероятностей слагаемых:

$$f_{(2)}(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau_1) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

или, учитывая, что $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, получаем $f_{(2)}(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) dF_2(\tau)$.

Обычно удобнее вычислять функцию распределения:

$$F_{(2)}(t) = \int_0^t f_{(2)}(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^t f_1(t - \tau) dF_2(\tau) d\tau = \int_0^t F_1(t - \tau) dF_2(\tau) = \int_0^t F_1(\tau) dF_2(t - \tau). \quad (3.4)$$

Для суммы трех случайных величин $t = (\tau_1 + \tau_2) + \tau_3$, очевидно, что

$$F_{(3)}(t) = \int_0^t F_{(2)}(t - \tau) dF_3(\tau). \quad (3.5)$$

Вообще, для суммы n независимых случайных величин их функция распределения находится как рекуррентная свертка:

$$F_{(n)}(t) = \int_0^t F_{(n-1)}(t - \tau) dF_n(\tau). \quad (3.6)$$

Учитывая, что законы распределения случайных величин τ_i одинаковы ($F_i(t) = F(t)$), имеем

$$P\{v(t) \geq n\} = F_{(n)}(t) = \int_0^t F_{(n-1)}(t - \tau) dF(\tau). \quad (3.7)$$

Таким образом, определение вероятности события $v(t) \geq n$ сводится к вычислению n -кратной свертки (3.7) законов распределения времени жизни.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) $n = 0$.

Так как событие $v(t) \geq 0$ достоверно по построению, то

$$P\{v(t) \geq 0\} = F_{(0)}(t) = F_0(t) = 1(t).$$

2) $n = 1$.

$$F_{(1)}(t) = F_1(t) = P\{v(t) \geq 1\} = \int_0^t F_0(t - \tau) dF(\tau) = \int_0^t 1(t - \tau) dF(\tau) = F(t) = P\{t < \tau\}. \quad (3.8)$$

Вычисление в общем виде для $n > 1$ функции $F_n(t)$ в большинстве случаев невозможно. Более того, даже для конкретного закона распределения $F(t)$ не всегда получается аналитическое выражение для n -кратной свертки. Задача достаточно легко решается только для экспоненциального закона надежности:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad dF(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt, \\ F_{(2)}(t) = \int_0^t [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}. \quad (3.9)$$

Можно показать, что n -кратная свертка для экспоненциального закона имеет вид

$$F_{(n)}(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (3.10)$$

Найдем вероятность того, что за время t произойдет ровно n отказов. Для этого рассмотрим следующие события:

$$A = \{v(t) \geq n\}, B = \{v(t) \geq n+1\}, C = \{v(t) = n\}.$$

В силу построения событий A , B и C видно, что $B \subset A$, $C = A \setminus B$. Тогда

$$P\{C\} = P\{A \setminus B\} = P\{A\} - P\{B\}$$

или в наших обозначениях

$$P\{v(t) = n\} = P_n(t) = P\{v(t) \geq n\} - P\{v(t) \geq n+1\} = F_{(n)}(t) - F_{(n+1)}(t). \quad (3.11)$$

В частности, при экспоненциальном законе надежности, учитывая соотношение (3.10), имеем

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (3.12)$$

откуда видно, что число отказов сильно уменьшается с ростом времени.

Выражения (3.2 – 3.7, 3.11) и дают искомую статистику процесса с мгновенным восстановлением. Однако вычисление n -кратных сверток законов распределения (3.7) представляет собой трудоемкую задачу, поэтому рассматривают более простые числовые характеристики процесса восстановления (или дискретной случайной величины $v(t)$). Важнейшей из них является *функция восстановления* $H(t)$, равная *среднему числу отказов* на интервале времени $[0, t]$:

$$H(t) = M[v(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n [F_{(n)}(t) - F_{(n+1)}(t)]. \quad (3.13)$$

Непосредственное использование (3.13) неудобно, так как опять же требует вычисление $(n+1)$ -кратной свертки. Поэтому вместо функции восстановления часто применяют дифференциальную характеристику – плотность восстановления $h(t)$. Согласно определению имеем

$$h(t) = \frac{d}{dt} H(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t}, \quad (3.14)$$

и плотность восстановления может быть интерпретирована как среднее число отказов, происшедших в единицу времени. Поэтому величина $h(t)$ имеет еще и специальное название – *средняя частота отказов* и специальное обозначение $\omega(t)$.

По определению процесса восстановления оценкой средней частоты отказов $\omega(t)$ является величина

$$\omega^*(t) = h^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t}, \quad (3.15)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказавших элементов за время Δt ; N – число испытываемых элементов, причем $N = \text{const}$, так как отказавшие образцы заменяются. При $N \rightarrow \infty$ эта оценка по вероятности сходится к средней частоте отказов.

Найдем связь функций $H(t)$ и $h(t)$ с характеристиками надежности самого элемента, используя формулы (2.10, 3.15) для оценок $\omega^*(t)$ и $q^*(t)$. На интервале $[t, t + \Delta t]$ возможны отказы двух видов (рис. 3.2).

1) Могут в первый раз отказать элементы, поставленные в работу в момент времени $t = 0$, т. е. работающие до первого отказа, с частотой отказов $q(t)$. Число таких элементов

$$n_1(t) = q^*(t)N \Delta t = q(t)N \Delta t. \quad (3.16)$$

2) Могут отказывать только элементы из числа восстановленных (замененных) на интервале $0 - t$. Пусть $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ – некоторый промежуток времени, предшествующий интервалу $[t, t + \Delta t]$, т. е. $\tau < t$ (см. рис. 3.2). За время $\Delta\tau$ из строя выйдут $n_2(\tau) = \omega^*(t)N \Delta t = \omega(t)N \Delta t$ элементов, которые восстанавливаются, и за время $[t, t + \Delta t]$ (элементы теперь работают до первого отказа) из них откажут

$$n_2(\Delta t) = n_2(\Delta\tau)q(t - \tau)\Delta t = \omega(\tau)N \Delta t q(t - \tau)\Delta t. \quad (3.17)$$

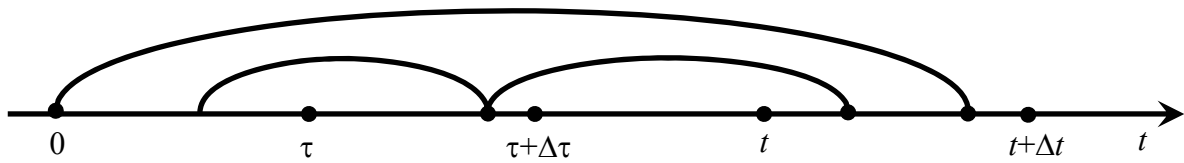


Рис. 3.2. Два типа отказов на интервале $[t, t + \Delta t]$

Для нахождения общего числа отказов 2-го вида интегрируем (3.17) по всем промежуткам $\Delta\tau$ от 0 до t :

$$n_2(t) = \int_0^t \omega(\tau)N \Delta t q(t - \tau)\Delta t = N \Delta t \int_0^t \omega(\tau)q(t - \tau)\Delta t. \quad (3.18)$$

Тогда общее число отказов всех типов на интервале $[t, t + \Delta t]$ равно

$$n(\Delta t) = n_1(t) + n_2(t) = q(t)N \Delta t + N \Delta t \int_0^t \omega(\tau)q(t - \tau)d\tau. \quad (3.19)$$

Разделив обе части (3.19) на $N\Delta t$ и учитывая (3.15), получим

$$\omega(t) = q(t) + \int_0^t \omega(\tau)q(t - \tau)d\tau = q(t) + \int_0^t \omega(t - \tau)q(\tau)d\tau \quad (3.20)$$

или (так как $\omega(t) = H'(t)$)

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t \left[q(t) + \int_0^t \omega(t - \tau)q(\tau)d\tau \right] dt = P(t) + \int_0^t \int_0^t \omega(t - \tau)q(\tau)d\tau dt = \\ &= F(t) + \int_0^t q(\tau)d\tau \int_0^t \omega(t - \tau)dt = F(t) + \int_0^t H(t - \tau)q(\tau)d\tau = \\ &= F(t) + \int_0^t H(t - \tau)dF(\tau). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Уравнения (3.20, 3.21), представляющие собой интегральные уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром, позволяют по известным плотностям вероятности отказов $q(t)$ или законам распределения $F(t)=Q(t)$ найти среднее число отказов (функцию восстановления) $H(t)$ или среднюю частоту отказов $\omega(t)$. Решение уравнений (3.20, 3.21) обычно проще, чем вычисление n -кратных сверток (3.13). Например, можно воспользоваться преобразованием Лапласа:

$$\begin{aligned}\omega(p) &= \mathcal{L}\{\omega(t)\} = \mathcal{L}\left\{q(t) + \int_0^t \omega(\tau)q(t-\tau)d\tau\right\} = \\ &= \mathcal{L}\{q(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t \omega(\tau)q(t-\tau)d\tau\right\} = q(p) + \omega(p) \cdot q(p),\end{aligned}$$

откуда

$$\omega(p) = \frac{q(p)}{1 - q(p)}. \quad (3.22)$$

Учитывая, что $q(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}$, а $F(0)=0$ и $P(0)=1$ – начальные условия, получаем

$$q(p) = pF(p) = 1 - pP(p).$$

Тогда

$$\omega(p) = \frac{pF(p)}{1 - pF(p)} = \frac{1 - pP(p)}{pP(p)}. \quad (3.23)$$

Аналогичные соотношения можно получить и для функции восстановления $H(t)$:

$$\begin{aligned}H(p) &= \mathcal{L}\{H(t)\} = \mathcal{L}\left\{F(t) + \int_0^t H(t-\tau)dF(\tau)\right\} = \\ &= \mathcal{L}\{F(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t H(t-\tau)dF(\tau)\right\} = F(p) + H(p) \cdot q(p), \\ H(p) &= \frac{F(p)}{1 - q(p)} = \frac{q(p)}{p(1 - q(p))}.\end{aligned} \quad (3.24)$$

Такой прием позволяет просто вычислить изображение функции $H(t)$ или $\omega(t)$, сложности возникают только при выполнении обратного преобразования Лапласа.

Большинство практически важных задач решаются, используя введенные характеристики процесса восстановления.

3.1.2. Задача о запасных элементах

Необходимо найти минимальное число запасных элементов n , которых с вероятностью не меньшей $P_0 = 1 - \alpha$ хватит на заданное время работы T . Выбор значения P_0 (доверительная вероятность) обычно производится из стандартного ряда 0,9; 0,95; 0,99 (или уровень значимости α берется из ряда 0,1; 0,05; 0,01).

Чтобы n элементов хватило (для замены отказавших) на время T , за этот промежуток времени должно быть не более n отказов, т. е. $v(T) \leq n$. Согласно условию задачи

$$P\{v(T) \leq n\} = P_0 = 1 - \alpha \quad \text{или} \quad P\{v(T) > n\} = \alpha,$$

тогда

$$P\{v(T) \geq n + 1\} \leq \alpha. \quad (3.25)$$

Учитывая (3.7), получаем

$$F_{(n+1)}(T) \leq \alpha. \quad (3.26)$$

Наименьшее число n , при котором выполняется (3.26), и дает решение задачи.

Следовательно, при решении задачи о запасных элементах необходимо вычислять n -кратные свертки функции $F(t)$, что в общем случае возможно только численно. В конечном виде свертка находится лишь для трех распределений – экспоненциального, нормального и Γ -распределения.

Пусть надежность элемента подчиняется экспоненциальному закону, для которого $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, а $P(t) = e^{-\lambda t}$. Пусть $\lambda = 10^{-3} \text{ 1/час}$, $\alpha = 0,05$. Тогда, с учетом соотношений (3.10) и (3.26), получаем

$$F_{(n+1)}(9000) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(9)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-9} \leq 0,05.$$

Если $n = 12$, то $F_{(13)}(9000) = 0,074 > 0,05$. При $n = 13$, $F_{(14)}(9000) = 0,041 < 0,05$. Значит, $n = 13$ является решением задачи о запасных элементах.

Увеличивая доверительную вероятность P_0 (уменьшая уровень значимости α), следует ожидать рост числа запасных элементов. Действительно, для тех же исходных данных, но при $\alpha = 0,01$ запасных элементов потребуется уже 17 ($n = 16$, $F_{(17)}(9000) = 0,011 > 0,01$; $n = 17$, $F_{(18)}(9000) = 0,002 < 0,01$).

3.1.3. Поток Пуассона

Для экспоненциального закона надежности вероятность того, что за время t произойдет ровно n отказов, согласно выражениям (3.10 – 3.12), равна

$$P\{v(t) = n\} = P_n(t) = F_{(n)}(t) - F_{(n+1)}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (3.27)$$

Таким образом, распределение числа отказов $v(t)$ на интервале $[0, t]$ подчиняется закону Пуассона.

Согласно соотношениям (3.13) и (3.27), функция восстановления (для экспоненциального закона) имеет вид

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda t \quad (3.28)$$

(так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda t}$), а средняя частота отказов определяется как

$$\omega(t) = H'(t) = \lambda. \quad (3.29)$$

Эти же соотношения можно найти из решения интегральных уравнений Вольтерра (3.20, 3.21). Действительно, так как $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $q(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, то $F(p) = \frac{\lambda}{p(p + \lambda)}$, $q(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda}$. Учитывая выражения (3.22 – 3.24), имеем

$$H(p) = \frac{\lambda}{p^2}, \quad \omega(p) = \frac{\lambda}{p}.$$

Тогда

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{p^2} \right\} = \lambda t,$$

$$\omega(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{p} \right\} = \lambda.$$

Из формул (3.28), (3.29) видно, что при экспоненциальном законе надежности параметр потока отказов λ не зависит от времени, а среднее число отказов $H(t)$ прямо пропорционально длине интервала времени. Процесс восстановления с такими характеристиками образует, так называемый, простейший поток событий (отказов) или *однородный процесс Пуассона* (пуассоновский поток). Естественно, поток Пуассона является идеализацией реальных потоков отказов, (так как экспоненциальный закон описывает нестареющие элементы), но, несмотря на это, широко применяется на практике.

Рассмотрим основные свойства пуассоновского процесса.

1) Стационарность

Вероятность того, что на некотором интервале времени произойдет определенное количество событий (отказов), не зависит от расположения этого интервала на временной оси, а определяется только длиной интервала и числом событий (т. е. процесс Пуассона является марковским случайным процессом).

2) Отсутствие последствия

Это означает, что вероятность наступления некоторого числа событий потока на промежутке Δt не зависит от того, сколько отказов было до этого (условная вероятность появления k отказов в интервале Δt совпадает с безусловной вероятностью).

3) Ординарность

Вероятность наступления более чем одного события потока (отказ) за малый промежуток времени есть величина бесконечно малая по сравнению с длиной интервала Δt :

$$P\{v(\Delta t) > 1\} = O(\Delta t). \quad (3.30)$$

Это означает, что на малом интервале Δt практически невозможно наступление более чем одного отказа.

Во многих случаях поток Пуассона хорошо аппроксимирует реальные потоки отказов (например, в сложных электронных схемах). Проверка на практике условий стационарности, отсутствия последействия и ординарности для установления пуассоновости случайного процесса, как правило, является сложной процедурой. Чаще пользуются теоремой Григелиолиса, смысл которой заключается в том, что если система состоит из большого числа высоконадежных элементов, отказы которых можно считать независимыми, то суммарный поток отказов в системе близок к пуассоновскому.

Укажем еще два интересных свойства пуассоновского потока:

а) если известно, что в определенном интервале времени наступили n событий потока, то моменты наступления этих событий независимы между собой и равномерно распределены в этом интервале;

б) суммарный поток, образованный наложением двух независимых потоков Пуассона с интенсивностями λ_1 и λ_2 , также является пуассоновским с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Если время жизни элемента распределено не экспоненциально, то поток отказов отличается от пуассоновского. Известно несколько различных моделей потоков [8], каждая из которых применяется в своем конкретном случае.

3.1.4. Оценки функции восстановления

Сложности в вычислении n -кратных сверток приводят к тому, что часто приходится строить оценки характеристик процесса восстановления. Например, оценим функцию восстановления $H(t)$.

По определению функции восстановления (3.13) имеем

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n [F_{(n)}(t) - F_{(n+1)}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n F_{(n+1)}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n F_{(n)}(t) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) F_{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{(n)}(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

В частности,

$$\omega(t) = H'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)}(t). \quad (3.32)$$

Так как члены ряда (3.31) – функции распределения, то они неотрицательны. Тогда получаем нижнюю оценку функции восстановления:

$$H(t) \geq F_{(1)}(t) = F(t). \quad (3.33)$$

Для построения верхней оценки рассмотрим два события:

$$A = \{t_n < t\} \text{ и } B = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t \right\},$$

где $t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$.

Из очевидного неравенства

$$\max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

следует, что

$$F_{(n)}(t) = P(t_n < t) \leq P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t\right). \quad (3.34)$$

События $\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t \right\}$ и $\{\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t\}$ эквивалентны по построению.

Поскольку, по предположению, времена жизни τ_i являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, то

$$P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t \right\} = P\{\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t\} = \prod_{i=1}^n P\{\tau_i < t\} = \prod_{i=1}^n F_i(t) = F^n(t)$$

и, учитывая (3.34),

$$F_{(n)}(t) \leq F^n(t). \quad (3.35)$$

Заменяя слагаемые в (3.31) их оценками (3.35), получаем верхнюю оценку функции восстановления:

$$H(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t). \quad (3.36)$$

Для любого конечного момента t функция $F(t) < 1$, тогда правая часть (3.36) – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем, равным $F(t)$. Следовательно, верхняя оценка принимает вид

$$H(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)}. \quad (3.37)$$

Таким образом, объединяя (3.33) и (3.37), получаем

$$F(t) \leq H(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)}. \quad (3.38)$$

Из формулы (3.38) видно, что для начального участка эксплуатации, на котором функция распределения $F(t) \ll 1$,

$$H(t) \approx F(t).$$

Для экспоненциального закона надежности, согласно (3.38), получаем

$$1 - e^{-\lambda t} \leq H(t) \leq e^{\lambda t} - 1. \quad (3.39)$$

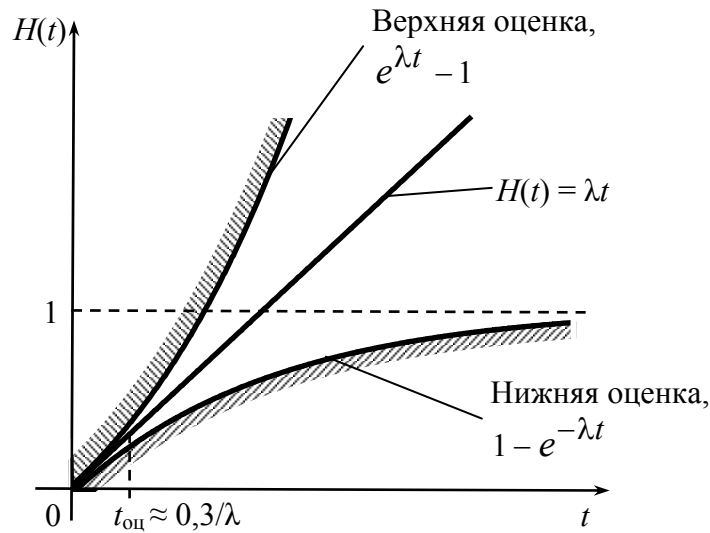


Рис. 3.3. Оценки функции восстановления для экспоненциального закона надежности

Точность оценок функции восстановления уменьшается с ростом t . На малом интервале $[0, t_{\text{оц}}]$ можно считать, что $H(t) \approx F(t)$. Для практических приложений приемлемо $t_{\text{оц}} \approx 0,3/\lambda$ (рис. 3.3). По виду функции $F(t)$ можно судить о функции восстановления (рис. 3.4).

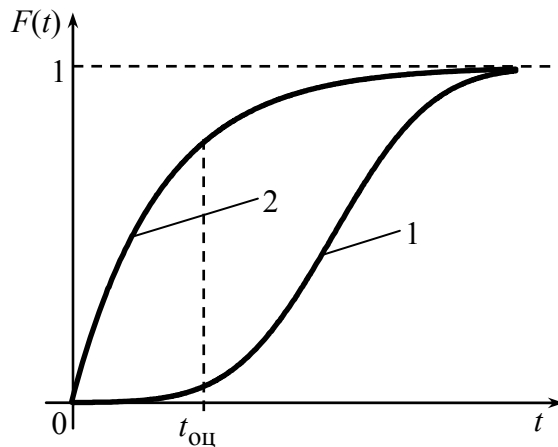


Рис. 3.4. Оценка среднего числа отказов на малом промежутке времени $[0, t_{\text{оц}}]$:

для элементов вида 1 среднее число отказов меньше, чем для элементов вида 2

3.1.5. Основные теоремы теории восстановления

Рассмотрим некоторые важные свойства процесса восстановления для достаточно большого интервала t , что представляет практический интерес, когда необходимо узнать поведение объекта после большого числа восстановлений. Математически это означает изучение асимптотических свойств характеристик процесса восстановления при $t \rightarrow \infty$ [12].

1) Для любого закона распределения $F(t)$ времени жизни справедливо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}, \quad (3.40)$$

т. е. на большом интервале времени среднее число отказов, приходящихся на единицу времени, постоянно и близко к величине, обратной к среднему времени безотказной работы.

2) Если плотность вероятности отказа $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (что практически всегда имеет место), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{1}{T_0}. \quad (3.41)$$

Это утверждение означает тот факт, что с течением времени локальные характеристики процесса восстановления (средняя частота отказов) стабилизируются и перестают зависеть от времени, т. е. процесс приближается к стационарному.

3) Теорема Смита (узловая теорема восстановления).

Если время жизни элемента τ – непрерывная случайная величина, а $\Psi(t)$ – монотонно невозрастающая функция, интегрируемая на интервале $[0, \infty)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Psi(t - \tau) dH(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \Psi(x) dx. \quad (3.42)$$

3.1.6. Надежность работы элемента на заданном участке времени

Во многих случаях от элемента требуется выполнение задачи, начиная с некоторого момента t , до которого он поддерживался в работоспособном состоянии. Например, аппарат типа “искусственное сердце” включается в работу до начала операции, но может быть использован, начиная с любого момента времени операции; система, стоящая на боевом дежурстве и т. п.

Найдем вероятность того, что элемент безотказно проработает на интервале $t, t + \tau$ (событие В, рис. 3.5).

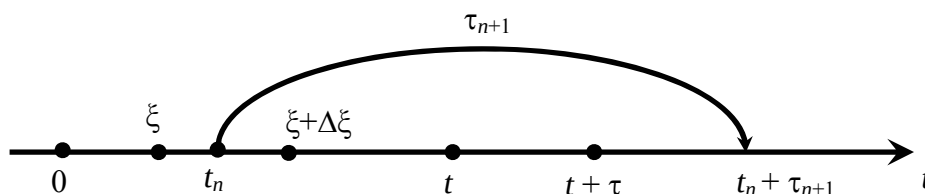


Рис. 3.5. К задаче 3.1.6

Для безотказной работы элемента на этом интервале необходимо, чтобы последний отказ произошел раньше момента t , а следующий – позже момента $t + \tau$.

Введем событие A_n , означающее, что на участке $0 - t$ произошло ровно n отказов, а на участке $t, t + \tau$ отказов не было (см. рис. 3.5):

$$\begin{aligned} A_n &= \{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\} \text{ при } n=1, 2, \dots, \\ A_0 &= \{t + \tau < \tau_1\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Событие A_n – сложное событие, состоящее в одновременном выполнении двух событий C и D :

$C = \{\text{на интервале } 0 - t \text{ произошло ровно } n \text{ отказов}\};$

$D = \{\text{на участке } t, t + \tau \text{ отказов не было}\}.$

Найдем вероятность события C . Предположим, что n -й отказ произошел в некотором малом промежутке времени $\xi, \xi + \Delta\xi$ (см. рис. 3.5), тогда

$$P(C) = P\{\xi < t_n < \xi + \Delta\xi\} = f_{(n)}(\xi)\Delta\xi + \Delta\xi O(1).$$

Следовательно, $f_{(n)}(\xi)d\xi$ есть дифференциал вероятности попадания случайной величины t_n в бесконечно малый интервал длины $d\xi$, т. е.

$$dP(C) = dP\{\xi < t_n < \xi + d\xi\} = f_{(n)}(\xi)d\xi.$$

Определим вероятность события D (при условии, что событие C произошло):

$$\begin{aligned} P(D/C) &= P\{\xi + \tau_{n+1} > t + \tau\} = P\{\tau_{n+1} > t + \tau - \xi\} = 1 - P\{\tau_{n+1} < t + \tau - \xi\} = \\ &= 1 - F(t + \tau - \xi). \end{aligned}$$

Тогда вероятность сложного события A_n (3.43) находим по формуле полной вероятности:

$$dP(A_n) = dP(C)P(D/C) = f_{(n)}(\xi)d\xi \cdot (1 - F(t + \tau - \xi)).$$

Интегрируя последнее соотношение по ξ , получаем

$$P(A_n) = \int_0^t f_{(n)}(\xi) \cdot (1 - F(t + \tau - \xi)) d\xi.$$

Очевидно, что искомое событие B , состоящее в безотказной работе элемента на $t, t + \tau$, равно объединению всех возможных событий A_n :

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

В силу несовместности событий A_n имеем

$$\begin{aligned} P\{B\} &= P_t(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) f_{(n)}(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая, что $f_{(n)}(x) = F_{(n)}'(x)$, $F_0(x) = 1(x)$, $f_0(x) = \delta(x)$ и соотношения (3.13, 3.31, 3.32), находим сумму плотностей вероятностей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(\xi) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)}(\xi) = \delta(\xi) + \omega(\xi).$$

Тогда, применяя основное свойство дельта-функции $\delta(x)$, получаем

$$P\{B\} = 1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) \omega(\xi) d\xi = P_t(\tau) = P(t, \tau). \quad (3.44)$$

По формуле (3.44) можно находить искомые вероятности для любого t и интервала τ . В частности, для $t = 0$ имеем

$$P_t(\tau) = P(0, \tau) = 1 - F(\tau) = P(\tau),$$

что соответствует вероятности безотказной работы.

В большинстве случаев момент времени t достаточно удален от нуля, поэтому изучают поведение найденной вероятности (3.44) при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) \omega(\xi) d\xi \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t + \tau)) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) dH(\xi) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) dH(\xi) \right). \end{aligned}$$

так как первый предел равен нулю.

Для вычисления второго предела применяем теорему Смита (3.42). Функция $\Psi(\cdot) = 1 - F(t, t + \tau)$ удовлетворяет условиям теоремы Смита, так как в силу свойств функции $F(t)$ она невозрастающая, а по исходному предположению о конечности среднего времени жизни элемента интегрируема на интервале $[0, \infty)$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(\tau) = P(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} [1 - F(t + \tau)] dt = \frac{1}{T_0} \int_{\tau}^{\infty} [1 - F(t)] dt. \quad (3.45)$$

Видно, что при $t \rightarrow \infty$ процесс восстановления становится стационарным, так как вероятность безотказной работы на интервале длиной τ зависит только от длины этого интервала.

Случайное время жизни элемента при $t \rightarrow \infty$ называется стационарным (остаточным) временем жизни, поэтому функция $P(\tau)$ задает распределение этого времени жизни. В частности, так как при экспоненциальном законе надежности элемент не стареет, а пуассоновский поток является стационарным, то из (3.45) следует экспоненциальный закон для стационарного времени жизни τ :

$$P(\tau) = e^{-\lambda \tau}.$$

3.2. Надежность элемента с конечным временем восстановления

3.2.1. Коэффициент готовности

В предыдущем разделе рассматривалась надежность элемента с мгновенным восстановлением. На практике во многих случаях восстановление отказавшего элемента занимает некоторый отрезок времени (сопоставимый со временем жизни элемента), необходимый для поиска неисправности, замены или ремонта отказавшего элемента. Это время может составлять величину доли секунд в системах автоматического контроля или длиться часами при неавтоматическом поиске и устранении неисправности. Поэтому в этом разделе будем рассматривать время восстановления в целом, считая его случайной величиной и не интересуясь его структурой.

Рассмотрим процесс с конечным временем восстановления, модель которого представлена на рис. 3.6.

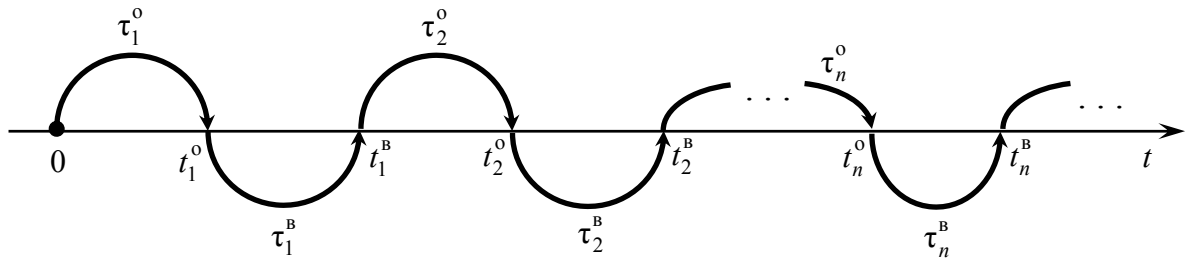


Рис. 3.6. Процесс с конечным временем восстановлением

Элемент, проработав случайное время τ_1^o , выходит из строя и в течение случайного времени τ_1^B восстанавливается. Восстановленный элемент работает время τ_2^o и восстанавливается время τ_2^B и т. д. Этот процесс продолжается неограниченно. Моменты времени t_n^o , в которых элемент отказывает, называют моментами (точками) отказа, а точки t_n^B , в которых элемент начинает работу – моментами восстановления (см. рис. 3.6).

Моменты отказов t_n^o и восстановлений t_n^B образуют случайные последовательности отказов

$$\begin{aligned}
 t_1^o &= \tau_1^o; \\
 t_2^o &= \tau_1^o + \tau_1^B + \tau_2^o; \\
 t_3^o &= \tau_1^o + \tau_1^B + \tau_2^o + \tau_2^B + \tau_3^o; \\
 &\dots \\
 t_n^o &= \tau_1^o + \tau_1^B + \dots + \tau_{n-1}^o + \tau_{n-1}^B + \tau_n^o; \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

и восстановлений

$$\begin{aligned}
 t_0^B &= 0; \\
 t_1^B &= \tau_1^O + \tau_1^B = t_1^O + \tau_1^B; \\
 t_2^B &= \tau_1^O + \tau_1^B + \tau_2^O + \tau_2^B = t_2^O + \tau_2^B; \\
 &\dots \\
 t_n^B &= \tau_1^O + \tau_1^B + \dots + \tau_n^O + \tau_n^B = t_n^O + \tau_n^B; \\
 &\dots,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

которые являются математической моделью процесса с конечным временем восстановления.

Предположим, что случайные времена жизни τ_i^O и восстановления τ_i^B независимы, имеют непрерывные и дифференцируемые законы распределения

$$F(t) = P\{\tau_n^O < t\}, \quad f(t) = F'(t), \tag{3.48}$$

$$G(t) = P\{\tau_n^B < t\}, \quad g(t) = G'(t), \tag{3.49}$$

не зависящие от номера отказа или восстановления. Это допущение всегда выполняется приблизительно (хотя бы потому, что с течением времени доля времени на ремонт возрастает).

Определенный таким образом (3.46 – 3.49) процесс отказов и восстановлений называют процессом с конечным временем восстановления.

Основной характеристикой такого процесса является *коэффициент готовности* $K_r(t)$, равный вероятности того, что в момент времени t элемент находится в исправном состоянии.

Для нахождения коэффициента готовности рассмотрим случайное событие A_n :

$$A_n = \{t_n^B < t < t_{n+1}^O\} = \{t_n^B < t < t_n^B + \tau_{n+1}^O\} \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.50}$$

которое означает, что n -е восстановление произошло ранее момента t , а $(n+1)$ -й отказ – позже момента t , т. е. в заданный момент времени t элемент исправен.

Искомое событие B , заключающееся в исправной работе элемента в момент времени t при любых n , равно объединению событий A_n :

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{3.51}$$

В силу несовместности событий A_n имеем

$$P\{B\} = K_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\}. \tag{3.52}$$

Для нахождения вероятности события A_n рассмотрим два потока:

– поток отказов $t_{n1} = \tau_1^O + \tau_2^O + \dots + \tau_n^O$;

– поток восстановлений $t_{n2} = \tau_1^B + \tau_2^B + \dots + \tau_n^B$,

причем, $t_n^B = t_{n1} + t_{n2}$.

Так как, по предположению, случайные величины τ_i^O и τ_i^B , входящие в эти потоки, независимые и одинаково распределенные, то распределение независимых случайных величин t_{n1} и t_{n2} можно найти так же, как для процесса с мгновенным восстановлением (3.2 – 3.7):

$$P\{t_{n1} < t\} = F_{(n)}(t) = \int_0^t F_{(n-1)}(t - \tau) dF(\tau), \quad (3.53)$$

$$P\{t_{n2} < t\} = G_{(n)}(t) = \int_0^t G_{(n-1)}(t - \tau) dG(\tau). \quad (3.54)$$

Поскольку $t_n^B = t_{n1} + t_{n2}$ есть сумма независимых случайных величин, то распределение величины t_n^B тоже определяется по свертке:

$$\varphi_{(n)}(t) = \frac{d}{dt} \Phi_{(n)}(t) = \int_0^t f_{(n)}(t - x) g_{(n)}(x) dx, \quad (3.55)$$

$$\Phi_{(n)}(t) = P\{t_n^B < t\} = \int_0^t \varphi_{(n)}(t) dt = \int_0^t F_{(n)}(t - x) dG_{(n)}(x), \quad (3.56)$$

где $f_{(n)}(t) = \frac{d}{dt} F_{(n)}(t)$ и $g_{(n)}(t) = \frac{d}{dt} G_{(n)}(t)$ – плотности вероятностей случайных величин t_{n1} и t_{n2} соответственно.

Таким образом, по известным плотностям вероятностей отказа и восстановления находятся законы распределения величин t_{n1} , t_{n2} и t_n^B . Однако, непосредственное вычисление n -кратных сверток по (3.55, 3.56) сопровождается значительными сложностями для большинства конкретных законов распределения времен жизни и восстановления (исключением, например, является экспоненциальный закон, но для него существуют более простые математические модели).

Пусть момент восстановления t_n^B произошел в некотором малом промежутке времени $\xi, \xi + \Delta\xi$ (рис. 3.7). Рассматривая события $C = \{\xi < t_n^B < \xi + \Delta\xi\}$, $D/C = \{\tau_{n+1}^O > t - \xi\}$ и применяя формулу полной вероятности (как и в предыдущем параграфе), получаем вероятность события A_n :

$$P(C) = P\{\xi < t_n^B < \xi + \Delta\xi\} = \varphi_{(n)}(\xi) \Delta\xi + \Delta\xi O(1),$$

$$dP(C) = dP\{\xi < t_n^B < \xi + \Delta\xi\} = \varphi_{(n)}(\xi) d\xi,$$

$$P(D/C) = P\{\tau_{n+1}^O > t - \xi\} = 1 - P\{\tau_{n+1}^O < t - \xi\} = 1 - F(t - \xi),$$

$$dP(A_n) = dP(C)P(D/C) = \varphi_{(n)}(\xi) d\xi \cdot (1 - F(t - \xi)),$$

$$P(A_n) = \int_0^t \varphi_{(n)}(\xi) \cdot (1 - F(t - \xi)) d\xi. \quad (3.57)$$

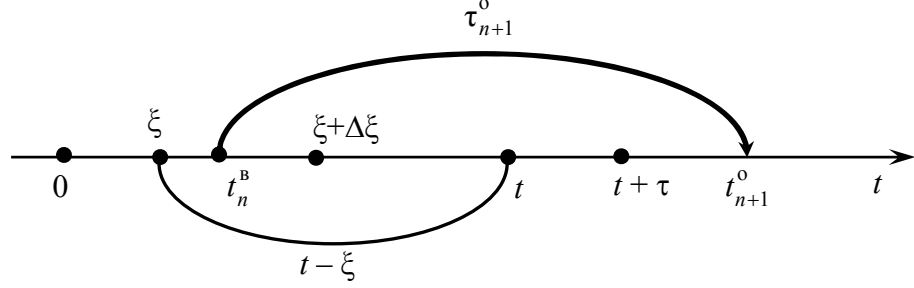


Рис. 3.7. К определению коэффициента готовности

Тогда, подставляя (3.57) в (3.52), получаем

$$P\{B\} = K_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \varphi_{(n)}(\xi) \cdot (1 - F(t - \xi)) d\xi =$$

$$= \int_0^t (1 - F(t - \xi)) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}(\xi) d\xi. \quad (3.58)$$

По аналогии с ранее рассмотренным случаем (пункт 3.1.6.) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}(\xi) = \varphi_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{(n)}(\xi) = \delta(\xi) + h_B(\xi), \quad (3.59)$$

где функция $h_B(\xi)$ называется плотностью восстановления для процесса с конечным временем восстановления.

Учитывая свойства дельта-функции $\delta(\xi)$ и подставляя (3.59) в (3.58), получим

$$K_r(t) = \int_0^t (1 - F(t - \xi)) [\delta(\xi) + h_B(\xi)] d\xi = \int_0^t (1 - F(t - \xi)) \delta(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t (1 - F(t - \xi)) h_B(\xi) d\xi = 1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t - \xi)) h_B(\xi) d\xi \quad (3.60)$$

или

$$K_r(t) = 1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t - \xi)) dH_B(\xi). \quad (3.61)$$

Формулы (3.60 и 3.61) позволяют теоретически найти выражение для коэффициента готовности для любых законов надежности и моментов времени, хотя ана-

литические вычисления по ним возможны только для простейших законов надежности (например, экспоненциального).

В частности, при $t = 0$

$$K_{\Gamma}(0) = 1. \quad (3.62)$$

Во многих случаях практический интерес представляет значение коэффициента готовности в момент времени, достаточно удаленный от начала работы элемента, т. е. предельное значение коэффициента готовности при $t \rightarrow \infty$ (стационарное значение, K_{Γ}):

$$\begin{aligned} K_{\Gamma} &= \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Gamma}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t - \xi)) dH_{\text{B}}(\xi) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - F(t)] + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t (1 - F(t - \xi)) dH_{\text{B}}(\xi) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t (1 - F(t - \xi)) dH_{\text{B}}(\xi) \right], \end{aligned}$$

так как первый предел равен нулю.

Для нахождения второго предела воспользуемся узловой теоремой восстановления (теорема Смита, выражение (3.42)). Функция

$$\Psi(\xi) = 1 - F(\xi)$$

удовлетворяет условиям теоремы Смита, так как она невозрастающая и существует интеграл

$$\Psi(\xi) = \int_0^t (1 - F(\xi)) d\xi = \int_0^t P(\xi) d\xi = T_0,$$

где T_0 – среднее время безотказной работы.

Тогда

$$K_{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Gamma}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t (1 - F(\xi)) d\xi = \frac{T_0}{T},$$

где T – среднее расстояние между точками процесса с конечным восстановлением, т. е. между точками отказов t_n^0 и восстановлений t_n^{B} , равное сумме среднего времени жизни T_0 и среднего времени восстановления T_{B} : $T = M[\tau_n^0 + \tau_n^{\text{B}}] = T_0 + T_{\text{B}}$.

Окончательно получаем

$$K_{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Gamma}(t) = \frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{T_0 + T_{\text{B}}}, \quad (3.63)$$

откуда видно, что стационарный коэффициент готовности K_{Γ} численно равен средней доле времени, в течение которого элемент находится в работоспособном состоянии.

Для процесса с конечным восстановлением интерес представляет задача о вероятности исправной работы элемента на заданном интервале времени $t, t + \tau$ (см. рис. 3.7), которая решается аналогично случаю с мгновенным восстановлением (пункт 3.1.6). Используя введенные ранее обозначения, получаем:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \{t_n^B < t < t + \tau < t_{n+1}^0\} = \{t_n^B < t < t + \tau < t_n^B + \tau_{n+1}^0\}, \\
 P(A_n) &= \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) \varphi_{(n)}(\xi) d\xi, \quad B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad P\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\}, \\
 P\{B\} &= P(t, \tau) = P_t(\tau) = \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}(\xi) d\xi = \\
 &= 1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) h_B(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Соотношение (3.64) позволяет найти искомую вероятность для любого момента времени t . В частности, для $t = 0$ имеем

$$P_0(\tau) = P(0, \tau) = 1 - F(\tau) = P(\tau), \tag{3.65}$$

что соответствует обычной вероятности безотказной работы.

Найдем значение вероятности $P(t, \tau)$ для достаточно удаленных от начала работы моментов времени:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - F(t + \tau) + \int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) h_B(\xi) d\xi \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t + \tau)) + \\
 &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) dH_B(\xi) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) dH_B(\xi) \right).
 \end{aligned}$$

Применяя теорему Смита при $\Psi(x) = 1 - F(t + \tau - \xi)$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(\tau) = P(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (1 - F(t + \tau - \xi)) dH_B(\xi) \right) = \frac{1}{T_0 + T_B} \int_0^{\infty} (1 - F(t + \tau)) dt. \tag{3.66}$$

Разделим и умножим (3.66) на T_0 . Тогда (с учетом 3.63)

$$\begin{aligned}
 P(\tau) &= \frac{T_0}{T_0 + T_B} \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} (1 - F(t + \tau)) dt = \\
 &= K_r \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{\infty} (1 - F(t + \tau)) dt = \frac{K_r}{T_0} \cdot \int_{\tau}^{\infty} (1 - F(t)) dt.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Таким образом, стационарная вероятность безотказной работы элемента на интервале $t, t + \tau$ равна произведению стационарного коэффициента готовности

K_r (т. е. вероятности того, что элемент исправен в начале этого интервала) на стационарную вероятность безотказной работы элемента в течение времени τ для процесса с мгновенным восстановлением. Практическое применение асимптотических формул (3.66, 3.67) определяется тем, что вероятность $P(t, \tau)$ перестает зависеть от момента времени t в пределах той точности, которая задается исследователем (обычно на уровне $\pm 5\%$).

В последнее время стационарную вероятность $P(\tau)$ называют вероятностью успешного использования (вероятность успешного выполнения задачи).

Улучшение надежности элемента с конечным временем восстановления, как следует из (3.67), состоит в увеличении его стационарного коэффициента готовности K_r либо за счет роста надежности самого элемента (T_0), либо за счет снижения затрат времени на восстановление (T_b), либо за счет и того и другого.

3.2.2. Случай экспоненциальных законов. Схема гибели и размножения

Во многих практических случаях случайные времена жизни и восстановления элемента удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальными законами:

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \\ G(t) &= 1 - e^{-\mu t}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где $\lambda = \frac{1}{T_0}$ – интенсивность отказов; $\mu = \frac{1}{T_b}$ – интенсивность восстановления.

Естественно, что все количественные характеристики такого процесса можно получить из общих формул предыдущего раздела (3.48 – 3.67), однако, для экспоненциальных законов существует и другой подход, получивший название *схемы гибели и размножения*.

Рассмотрим процесс восстановления в двух близких точках t и $t + \Delta t$. Событие, состоящее в исправной работе элемента в момент $t + \Delta t$, может произойти в результате наступления двух несовместных событий:

а) $C = \{\text{в моменты } t \text{ и } t + \Delta t \text{ элемент исправен}\},$

$$P(C) = P(t)[1 - Q(t, t + \Delta t)],$$

где $1 - Q(t, t + \Delta t)$ – вероятность не отказа в интервале $t, t + \Delta t$;

б) $D = \{\text{в момент } t \text{ элемент неисправен, а к моменту } t + \Delta t \text{ успел восстановиться}\},$

$$P(D) = [1 - P(t)]G(t, t + \Delta t),$$

где $G(t, t + \Delta t)$ – вероятность восстановления за время $t, t + \Delta t$.

Для экспоненциального закона, учитывая соотношения (2.13, 2.14 и 2.24), соответствующие вероятности равны

$$Q(t, t + \Delta t) = \lambda \Delta t + O(\Delta t),$$

$$G(t, t + \Delta t) = \mu \Delta t + O(\Delta t).$$

Тогда, применяя формулу полных вероятностей, находим вероятность исправной работы элемента в момент $t + \Delta t$ (коэффициент готовности):

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) &= P(t)[1 - Q(t, t + \Delta t)] + [1 - P(t)]G(t, t + \Delta t) = \\ &= P(t)[1 - (\lambda \Delta t + O(\Delta t))] + [1 - P(t)][\mu \Delta t + O(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Переходя в выражении (3.69) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -P(t)\lambda + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}P(t) + \mu - P(t)\mu + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}[1 - P(t)]$$

или

$$P'(t) = -(\lambda + \mu)P(t) + \mu. \quad (3.70)$$

Уравнение (3.70) – это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решая которое с учетом начального условия $P(0) = 1$, находим искомую вероятность (рис. 3.8):

$$P(t) = K_r(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (3.71)$$

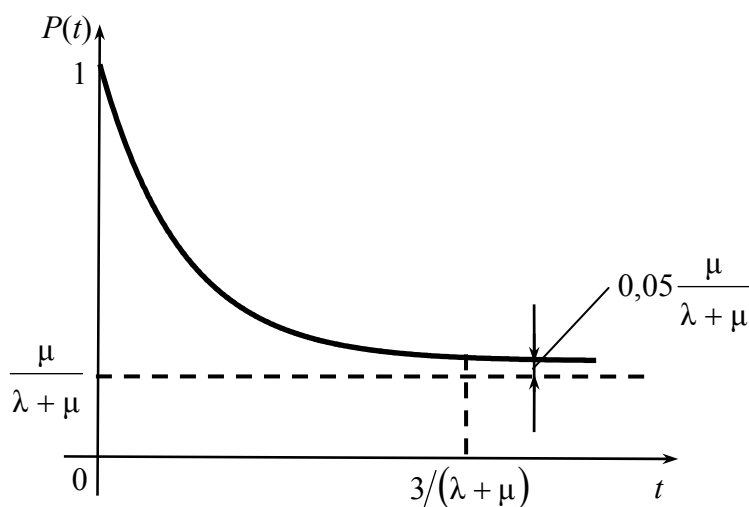


Рис. 3.8. Случай экспоненциальных законов

Из (3.71) видно, что время установления практической стационарности процесса обратно пропорционально интенсивностям отказов λ и восстановлений μ . Обычно $\lambda \ll \mu$ (типичные значения $\lambda \approx 10^{-6} \text{ 1/час}$, $\mu \approx 10^{-2} \text{ 1/час}$), поэтому практически все определяется только интенсивностью восстановления и асимптотическими формулами можно пользоваться уже при $t \approx \frac{3}{\lambda + \mu}$.

Так как $\lambda = \frac{1}{T_0}$, $\mu = \frac{1}{T_B}$, то стационарный коэффициент готовности

$$K_r = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{T_0}{T_0 + T_b}, \quad (3.72)$$

а вероятность успешного использования на интервале τ имеет вид

$$P(\tau) = \frac{K_r}{T_0} \int_0^{\infty} (1 - F(t + \tau)) dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+\tau)t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda\tau}. \quad (3.73)$$

Если $\lambda \ll \mu$, то $K_r \approx 1$, т. е. независимо от общей длительности работы элемента вероятность успешного использования $P(\tau)$ (как следует из (3.73)) мало отличается от вероятности безотказной работы на интервале τ ($P(\tau) \approx e^{-\lambda\tau}$). Поэтому повышенное внимание необходимо уделять службам ремонта.

Для элементов с конечным восстановлением вместо понятия “среднее время безотказной работы” вводится понятие “среднее время между отказами” или “наработка на отказ”:

$$T_H = M[\tau^0].$$

Так как по предположению время жизни элемента распределено одинаково и не зависит от номера отказа, то наработка на отказ совпадает со средним временем безотказной работы.

Оценка величины T_H строится по формуле

$$T_H^* = \frac{\tau_1^0 + \tau_2^0 + \dots + \tau_n^0}{n}, \quad (3.74)$$

где n – число отказов за время t .

Очевидно, что асимптотическое поведение наработки на отказ определяется соотношением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_H = T_0. \quad (3.75)$$

Рассмотренные в главе 3 задачи являются классическими и не исчерпывают возможные практические ситуации. Например:

а) процесс восстановления рассматривался в предположении о том, что восстановление начинается немедленно с момента отказа элемента, хотя на практике все ремонтные службы обладают инерционностью и ограниченной пропускной способностью, учет которых составляет отдельную задачу;

б) при решении задач восстановления часто необходимо учитывать экономические аспекты, так как восстановление не всегда может быть целесообразно.

4. СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ

В предыдущих главах речь шла о надежности элемента как единого целого. Вполне естественным, однако, является стремление исследовать надежность сложных устройств, зная надежность их компонентов. Это приводит к понятию *структурной надежности*, т. е. результирующей надежности системы при заданной структуре (способ соединения элементов системы) и известных характеристиках надежности составляющих ее элементов. Этот вопрос является тем более важным, что он позволяет проанализировать влияние надежности отдельных элементов на надежность системы в целом и указать пути ее повышения. Характерным примером здесь является проектирование снаряда ФАУ–1, в процессе которого конструкторы руководствовались неправильным предположением о том, что надежность системы определяется надежностью слабейшего звена. Из-за отсутствия теоретических разработок долгое время не удавалось найти приемлемого решения, пока математически не был указан правильный путь расчетов надежности этой сложной системы.

4.1. Расчет типовых структур систем по надежности

В зависимости от характера отказов, от того, как связаны между собой отказы отдельных элементов системы и самой системы, различают следующие основные структуры систем по надежности.

1. *Последовательная структура*, при которой отказ любого элемента системы приводит к отказу всей системы (простейший пример – елочная гирлянда). Такие структуры характерны для систем общепромышленного назначения, отказы которых имеют невысокую цену (например, бытовая техника).

2. *Параллельная структура*, характеризующаяся тем, что отказ всей системы происходит в том случае, когда отказывают все элементы, входящие в систему. Эти структуры характерны для ответственных систем с высокой ценой отказов.

3. *Смешанные структуры*, состоящие из комбинаций последовательных и параллельных структур.

4. *Сложные структуры*, которые не сводятся к смешанной схеме. Известно несколько типов сложных структур, например, радиальные и иерархические (многоуровневые). Такие структуры характерны для информационных систем, для автоматизированных систем управления (АСУ), для систем управления в социальной сфере.

При составлении структуры системы по надежности необходимо ответить на следующие вопросы: какие отказы следует учитывать в системе; какие отказы надо учитывать в элементах системы; какова взаимосвязь отказов элементов и системы. При этом необходим тщательный анализ механических, электрических и других схем системы, чтобы установить влияние элементов системы на ее надеж-

ность. В частности, не всегда последовательное или параллельное соединение элементов системы эквивалентно такому же их соединению в структуре по надежности.

Например, включенные последовательно электрически конденсаторы при типичном отказе вида “короткое замыкание” (пробой) соединены, в смысле надежности, параллельно, а при отказе типа “обрыв” – последовательно (рис. 4.1).

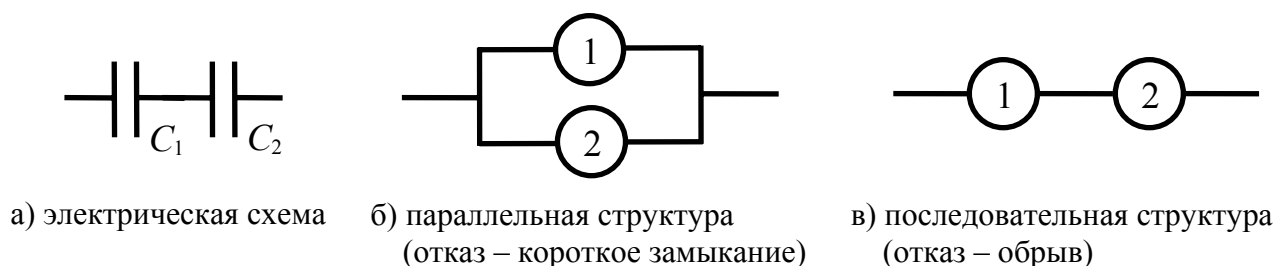


Рис. 4.1. Последовательное соединение конденсаторов (а)
и структурные схемы по надежности (б, в) при разных типах отказов

В зависимости от характера отказов элементов (пробой или обрыв) простейшего выпрямителя (параллельное электрическое соединение двух диодов) возможны также различные структуры по надежности (рис. 4.2): при отказах типа “короткое замыкание” получаем последовательную структуру по надежности, а при отказе типа “обрыв” – параллельную. Если учитывать одновременно отказы двух типов, то общей схемы по надежности составить не удастся.

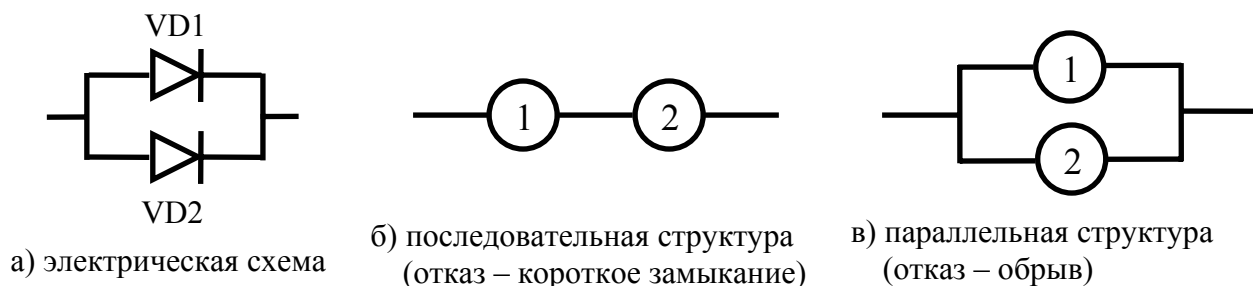


Рис. 4.2. Параллельное соединение диодов (а)
и структурные схемы по надежности (б, в) при разных типах отказов

Структурные схемы по надежности особенно эффективны, если элементы системы могут находиться в двух состояниях: работоспособность или отказ. При большем числе состояний применяются алгебраические методы расчета надежности системы.

Для дальнейших расчетов примем одно, достаточно сильное, допущение о том, что отказы элементов суть независимые случайные события, т. е. отказ любой группы элементов не изменяет характеристик надежности других элементов.

4.1.1. Последовательная схема

Последовательное соединение элементов в смысле надежности показано на рис. 4.3.

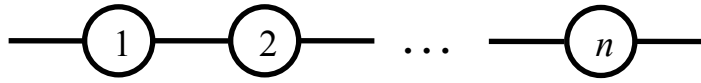


Рис. 4.3. Последовательная структура по надежности

Для расчета надежности последовательной структуры введем следующие обозначения:

A_i – событие, состоящее в исправной работе i -го элемента системы, $i = \overline{1, n}$;

B – событие, состоящее в исправной работе системы.

По определению последовательной структуры

$$B = \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

следовательно, вероятность безотказной работы системы равна

$$P_{\Sigma}(t) = P\{B\} = P\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\}. \quad (4.1)$$

Таким образом, в общем случае произведений событий A_i необходимо использовать формулу умножения вероятностей, для чего требуется знать условные вероятности соответствующих событий, но с учетом предположения о независимости отказов получаем

$$P_{\Sigma}(t) = P\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\} = \prod_{i=1}^n P_i(t), \quad (4.2)$$

где $P_i(t)$ – вероятность исправной работы элементов системы; $P_{\Sigma}(t)$ – вероятность безотказной работы системы.

Известно (2.15), что

$$P_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(t) dt\right),$$

тогда

$$P_{\Sigma}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_{\Sigma}(t) dt\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(t) dt\right) = e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt}, \quad (4.3)$$

где

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что суммарная интенсивность отказов системы с последовательной структурой $\lambda_{\Sigma}(t)$ больше, чем интенсивности отказов элементов этой системы $\lambda_i(t)$.

В любой системе имеются группы из одинаковых по надежности элементов – конденсаторы, сопротивления, реле и т. п. Тогда для системы из s групп имеем

$$P(t) = [P_1(t)]^{n_1} \cdot [P_2(t)]^{n_2} \cdot \dots \cdot [P_s(t)]^{n_s}, \quad (4.5)$$

где n_i – число элементов в i -й группе, $i = \overline{1, s}$.

Если обоснована гипотеза об экспоненциальном законе распределения надежности элементов системы:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}, \quad P_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad \text{то}$$

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

следовательно,

$$P_{\Sigma}(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-t \sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{-\lambda_{\Sigma} t}. \quad (4.6)$$

Таким образом, при последовательной структуре системы по надежности:

- 1) вероятности безотказной работы элементов перемножаются, а интенсивности отказов – складываются;
- 2) если надежность элементов системы подчиняется экспоненциальному закону, то и надежность системы будет также подчиняться экспоненциальному закону (4.6), т. е. экспоненциальный закон для последовательной структуры обладает свойством устойчивости.

Применяя полученные выше формулы, можно найти и другие характеристики надежности системы. Например, вероятность отказа системы

$$Q_{\Sigma}(t) = 1 - P_{\Sigma}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n P_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - Q_i(t)). \quad (4.7)$$

Если система с последовательной структурой содержит большое число одинаковых высоконадежных элементов, то ее надежность может быть низкой. Например, при $P_i(t) = 0,999$ получаем результаты, приведенные в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Зависимость надежности системы от количества элементов

n	1	10	20	30	40	50	100
$P_{\Sigma}(t)$	0,999	0,990	0,980	0,970	0,960	0,951	0,905
$Q_{\Sigma}(t)$	0,001	0,010	0,020	0,030	0,040	0,049	0,095

4.1.2. Параллельная схема

Параллельная структура системы в смысле надежности показана на рис. 4.4.

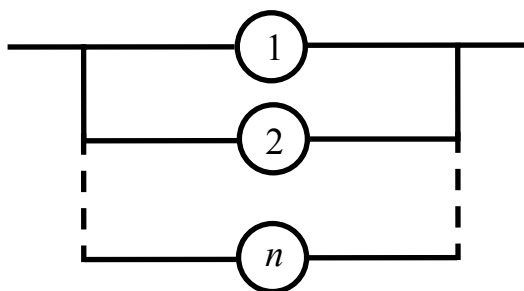


Рис. 4.4. Параллельная структура системы по надежности

Пусть A_i – событие, заключающееся в том, что i -й элемент системы отказал, $i = \overline{1, n}$; B – отказ системы.

Согласно определению параллельной структуры

$$B = \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

следовательно, вероятность отказа системы (с учетом независимости отказов) определяется как

$$Q_{\Sigma}(t) = P\{B\} = P\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\} = \prod_{i=1}^n Q_i(t), \quad (4.8)$$

где $Q_i(t)$ – вероятность отказа элементов системы; $Q_{\Sigma}(t)$ – вероятность отказа всей системы.

Очевидно, что вероятность безотказной работы системы с параллельной структурой равна

$$P_{\Sigma}(t) = 1 - Q_{\Sigma}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)). \quad (4.9)$$

Таким образом, при параллельном соединении элементов (в смысле надежности) вероятности отказов элементов перемножаются (4.8), поэтому вероятность отказа системы меньше вероятности отказа самого ненадежного элемента ($Q_i(t) < 1$, $Q_{\Sigma}(t) < Q_i(t)$). Надежность системы при параллельном соединении повышается по сравнению с надежностью отдельных элементов (4.9). В частности, для равнонадежных элементов ($Q_i(t) = Q(t)$, $P_i(t) = P(t)$) имеем

$$Q_{\Sigma}(t) = Q^n(t), \quad P_{\Sigma}(t) = 1 - (1 - P(t))^n. \quad (4.10)$$

При параллельном соединении экспоненциальный закон неустойчив, т. е. результирующая надежность не подчиняется экспоненциальному закону распределения. Например, для одинаковых элементов (с равной интенсивностью отказов, $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$) получаем

$$Q_{\Sigma}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad P_{\Sigma}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n. \quad (4.11)$$

Найдем среднее время безотказной работы системы (для одинаковых элементов с экспоненциальным законом надежности). Согласно (2.5) имеем

$$T_{0_{\Sigma}} = \int_0^{\infty} P_{\Sigma}(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt. \quad (4.12)$$

Делая в (4.12) замену $x = 1 - e^{-\lambda t}$, $t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-x}$, $dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dx}{1-x}$, получаем

$$\begin{aligned} T_{0_{\Sigma}} &= \int_0^1 (1 - x^n) \frac{dx}{\lambda(1-x)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

откуда видно, что

1) для $n > 1$ среднее время жизни системы $T_{0_{\Sigma}}$ больше среднего времени жизни ее элементов T_0 : $T_{0_{\Sigma}} > T_0$;

2) среднее время жизни системы не пропорционально числу элементов, причем очередной элемент вносит меньший вклад по сравнению с предыдущим.

При большом количестве элементов (обычно уже при $n \geq 5$) среднее время безотказной работы системы можно приближенно найти по более простой формуле

$$T_{0_{\Sigma}} \approx T_0 [\ln n + C], \quad (4.14)$$

где $C = 0,57721566$ – постоянная Эйлера.

Системы с параллельным включением элементов (в смысле надежности), как правило, не возникают естественным образом, а специально создаются для повышения надежности. Медленное возрастание среднего времени жизни системы (4.13, 4.14) указывает на то, что рост надежности при параллельной структуре ощутимо сказывается на малых интервалах времени. Поэтому надежность таких систем нельзя однозначно описать каким-либо одним показателем и необходимо анализировать все доступные ее свойства.

4.1.3. Смешанная структура

Надежность системы при смешанном соединении элементов достаточно просто сводится к рассмотренным выше двум случаям. Применяя последовательные преобразования участков смешанной структуры, расчет надежности основывается на поэтапном использовании формул для последовательного (4.2, 4.7) и параллельного соединения (4.8, 4.9).

В качестве примера рассмотрим поэтапный расчет надежности системы со смешанной структурой (в смысле надежности), изображенной на рис. 4.5. Для упрощения записи аргумент t во всех выражениях опущен.

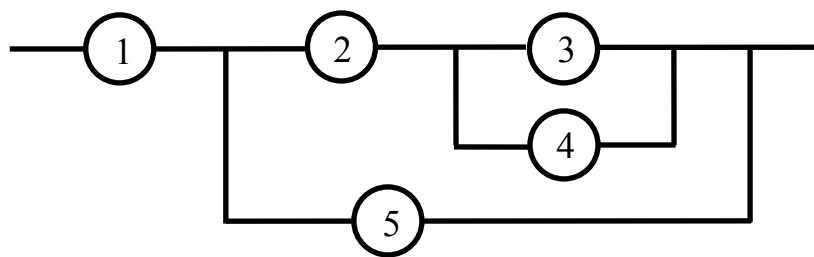


Рис. 4.5. Смешанная структура системы по надежности

1) Элементы (3, 4) соединены параллельно, поэтому, применяя формулы (4.8, 4.9), получаем

$$Q_{3,4} = Q_3 \cdot Q_4, \quad P_{3,4} = 1 - Q_3 \cdot Q_4.$$

2) Элементы (2) и (3, 4) включены последовательно, то, согласно (4.2),

$$P_{234} = P_2 \cdot P_{34} = P_2 \cdot (1 - Q_3 \cdot Q_4), \quad Q_{234} = 1 - P_2 \cdot (1 - Q_3 \cdot Q_4).$$

3) Контур (2, 3, 4) и (5) представляет параллельное соединение соответствующих элементов, поэтому

$$Q_{2345} = Q_{234} \cdot Q_5 = Q_5 \cdot [1 - P_2 \cdot (1 - Q_3 \cdot Q_4)],$$

$$P_{2345} = 1 - Q_{2345} = 1 - Q_5 \cdot [1 - P_2 \cdot (1 - Q_3 \cdot Q_4)].$$

4) Так как элементы (1) и (2, 3, 4, 5) соединены последовательно, окончательно получаем надежность смешанной системы (см. рис. 4.5):

$$P_{\Sigma} = P_{12345} = P_1 \cdot P_{2345} = P_1 \cdot [1 - Q_5 \cdot (1 - P_2 \cdot (1 - Q_3 \cdot Q_4))].$$

Таким образом, расчет надежности смешанной структуры не представляет принципиальной трудности, а требует только лишь аккуратности. Результирующая надежность при этом даже для простых законов надежности элементов может иметь сложное выражение.

4.1.4. Сложные структуры

Многие реальные системы имеют такую структуру соединения (или взаимодействия) элементов, которая не сводится к комбинации последовательных и параллельных цепей. В общем случае такие системы могут представлять собой сети очень сложной конфигурации, например, с радиально-кольцевой (рис. 4.6 а, б), иерархической (рис. 4.6 в) и т. п. структурами. На практике подобные структуры обычно возникают в информационных системах, АСУ, системах связи и т. д.

Сложные структуры обладают большим разнообразием, что не позволяет предложить единый метод для их расчета. Методы оценки показателей надежности систем со сложной структурой достаточно специфичны (ниже приводятся некоторые из них).

Для подобных систем основную трудность представляет четкая формулировка понятия “отказ системы” и соответственное разделение всего множества состояний системы на подмножества работоспособности и отказа системы. Если эту

проблему удастся решить, то для систем небольшой размерности наиболее удобен метод прямого перебора.

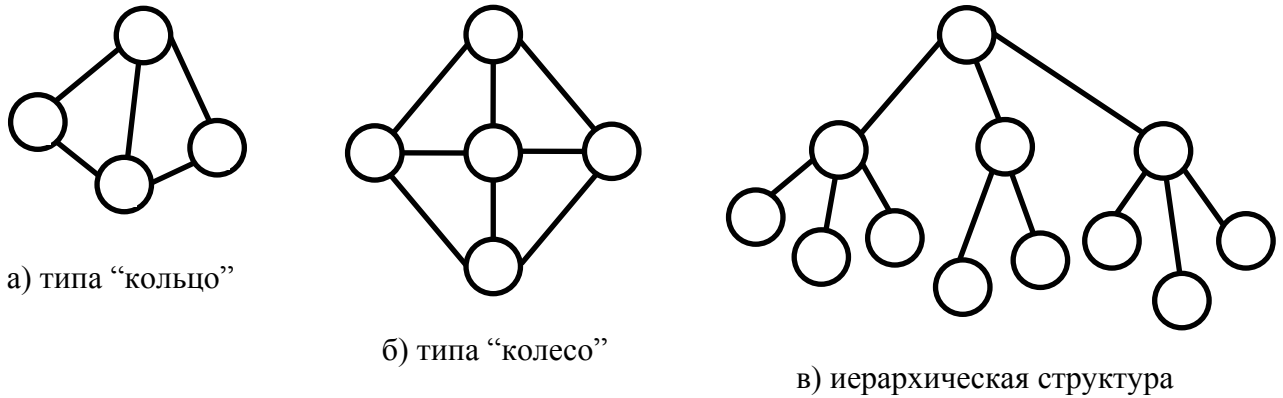


Рис. 4.6. Сложные структуры системы по надежности

а. Метод прямого перебора

Произвольная система, состоящая из n элементов, каждый из которых может находиться в двух состояниях – “отказ” и “работоспособность”, может находиться в 2^n различных состояниях. Если известен (определен) критерий отказа системы, то, применив его к каждому состоянию, можно разделить все множество состояний системы на подмножество работоспособности F и подмножество отказа (если состояние $\alpha_i \in F$, то система работоспособна). Следовательно, если удастся определить вероятность $P\{\alpha = \alpha_i\}$ появления состояния α_i , то вероятность исправной работы системы

$$P\{\alpha \in F\} = \sum_{\alpha_i \in F} P\{\alpha = \alpha_i\} = \sum_{\alpha_i \in F} P_{\alpha_i}. \quad (4.15)$$

Как видно из (4.15), основная трудность метода состоит в формулировке понятия отказа и в вычислении вероятностей соответствующих состояний $P\{\alpha_i\}$.

В частности, все элементы системы взаимно независимы (отказы – независимые случайные события), то расчеты значительно упрощаются. Например,

$$P_0 = \prod_{i=1}^n p_i, \quad P_i = q_i \prod_{j \neq i} p_j = \frac{q_i}{p_i} P_0 = \gamma_i P_0,$$

где P_0 – вероятность исправного состояния всех элементов системы; P_i – вероятность исправного состояния всех, кроме i -го; p_i – вероятность исправного состояния i -го элемента; q_i – вероятность состояния неработоспособности i -го элемента.

Аналогично обозначим $P_{i,j}$ – вероятность исправной работы всех элементов, кроме i -го и j -го. Тогда $P_{i,j} = q_i q_j \prod_{k \neq i,j} p_k = \gamma_i \gamma_j P_0$ и для n элементов получим

$$P_{1,2,\dots,n} = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n = \prod_{i=1}^n q_i.$$

Расчет по данному методу является весьма громоздким при большом n , поэтому для сложных систем и систем с плохо формализуемым понятием отказа применяются другие методы (например, включения, моделирования системы).

б. Метод разложения относительно особого элемента

В некоторых случаях при анализе сложных систем эффективно применение метода разложения структуры системы по особому элементу. Метод основан на использовании известной теоремы математической логики о разложении логической функции по одному из аргументов. Применительно к задачам надежности идея метода заключается в следующем.

Пусть i -й элемент объявлен особым, тогда справедливо выражение

$$P_{\Sigma} = p_i P_{\Sigma}(x_i = 1) + q_i P_{\Sigma}(x_i = 0), \quad (4.16)$$

где $P_{\Sigma}(x_i = 1)$ – вероятность состояния работоспособности системы при условии, что особый элемент абсолютно надежен; $P_{\Sigma}(x_i = 0)$ – та же вероятность при условии, что особый элемент заведомо отказал (абсолютно ненадежен).

Выбор особого элемента производится в зависимости от особенностей структуры исследуемой системы. За счет выбора особого элемента часто сложную структуру удастся свести к смешанной. Если такое сведение не удастся сделать за один этап, то метод можно применять неоднократно. Указанное разложение можно сделать и для нескольких элементов, перебрав их возможные состояния (идея перебора). Заметим, что однозначных рекомендаций по выбору особого элемента сделать в общем случае не удастся.

В качестве примера рассмотрим расчет надежности для мостиковой схемы, показанной на рис. 4.7.

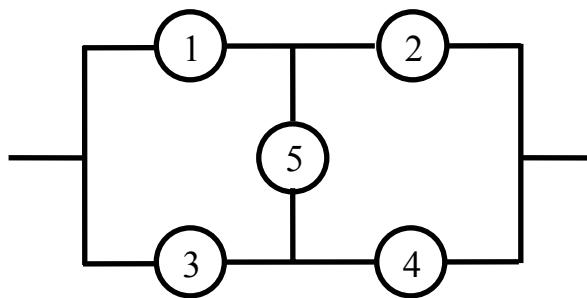


Рис. 4.7. Мостиковая структура системы по надежности

- 1) В качестве особого, очевидно, выбираем пятый (центральный) элемент.
- 2) При абсолютной надежности особого элемента ($x_5 = 1$) структура системы имеет вид (рис. 4.8, а). Вероятность исправной работы системы

$$P_{\Sigma}(x_5 = 1) = (1 - Q_1 \cdot Q_3) \cdot (1 - Q_2 \cdot Q_4).$$

3) В случае достоверно отказавшего особого элемента ($x_5 = 0$) получаем структуру (см. рис. 4.8, б) с вероятностью безотказной работы

$$P_{\Sigma}(x_5 = 0) = (1 - P_1 \cdot P_2) \cdot (1 - P_3 \cdot P_4).$$

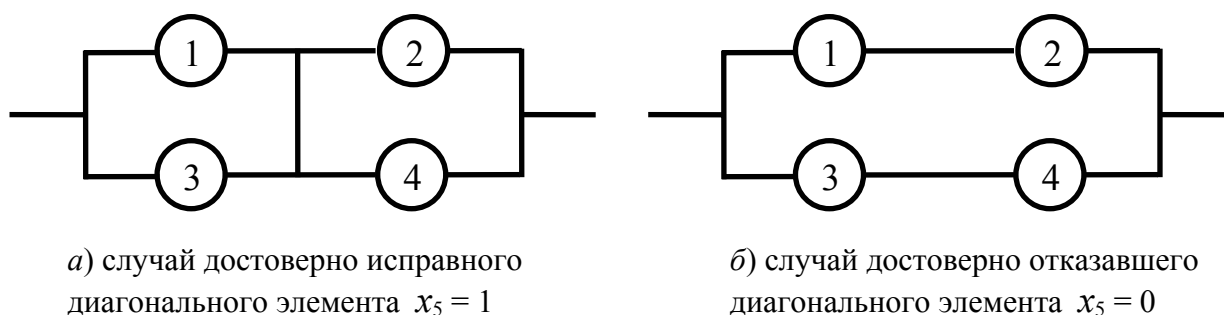


Рис. 4.8. Представление мостиковой схемы в виде параллельно-последовательного соединения

4) Согласно (4.16), окончательно получаем надежность исходной системы с мостиковой структурой по надежности (см. рис. 4.7)

$$P_{\Sigma} = P_5 \cdot (1 - Q_1 \cdot Q_3) \cdot (1 - Q_2 \cdot Q_4) + Q_5 \cdot (1 - P_1 \cdot P_2) \cdot (1 - P_3 \cdot P_4).$$

Кроме рассмотренных существует и ряд других методов [4, 7] (например, метод минимальных путей и сечений, аналитико-статистический метод), применение которых позволяет рассчитать надежность системы со сложной структурой.

4.2. Надежность системы с зависимыми отказами

Допущение о том, что элементы системы независимы, в смысле надежности, является очень сильным и в реальных системах часто не выполняется. Отказы одних элементов обычно нарушают условия работы других элементов, влияя тем самым на их надежность. Однако учет взаимозависимости элементов приводит к значительному усложнению расчетов, а в некоторых случаях делает его невозможным. Из-за многообразия связей между элементами системы (по надежности) не удастся построить типовую методику расчета надежности систем с зависимыми отказами.

Рассмотрим важный пример расчета надежности блока, состоящего из двух параллельно включенных элементов, надежности которых подчиняются экспоненциальному закону, но интенсивность отказов каждого элемента зависит от состояния другого. Обозначим:

λ_1, λ_2 – интенсивности (безусловные) отказов первого и второго элементов;

λ_{12} – интенсивность отказов первого элемента при условии, что второй элемент отказал;

λ_{21} – интенсивность отказов второго элемента при условии, что первый элемент отказал.

Найдем вероятность исправной работы системы на интервале времени $[0, t)$. Введем следующие события:

A_1 – на интервале $[0, t)$ оба элемента исправны;

A_2 – за время t вышел из строя первый элемент, но не отказал второй;

A_3 – за время t вышел из строя второй элемент, но не отказал первый.

Искомое событие B , состоящее в исправной работе системы, является объединением этих событий:

$$B = \bigcup_{i=1}^3 A_i.$$

Поскольку события A_i суть несовместные, то вероятность безотказной работы системы

$$P_{\Sigma}(t) = P\{B\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^3 A_i\right\} = \sum_{i=1}^3 P(A_i). \quad (4.17)$$

Определим вероятности событий A_i .

1) $P(A_1) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ (как вероятность совместного наступления двух независимых событий).

2) Событие A_2 есть сложное событие, состоящее, во-первых, в том, что до момента наблюдения $0 \leq \tau < t$ оба элемента работали исправно с вероятностью $p_1(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}$, во-вторых, в том, что на интервале $\tau, \tau + d\tau$ первый элемент откажет с вероятностью $p_2(\tau, \tau + d\tau) = \lambda_1 d\tau$ и, в-третьих, в том, что второй элемент, работая с новой интенсивностью отказа λ_{21} , в промежутке длины $t - \tau$ не откажет с вероятностью $p_3(t - \tau) = e^{-\lambda_{21}(t - \tau)}$.

Тогда, применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A_2) = \int_0^t e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} \cdot e^{-\lambda_{21}(t - \tau)} \cdot \lambda_1 d\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{21}} \left(e^{-\lambda_{21}t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \right).$$

3) Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что

$$P(A_3) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{12}} \left(e^{-\lambda_{12}t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \right).$$

Следовательно, надежность всей системы из двух параллельных (в смысле надежности) элементов с экспоненциальным законом надежности

$$\begin{aligned} P_{\Sigma}(t) = P(B) = & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{21}} e^{-\lambda_{21}t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}t} - \\ & - \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{21}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{12}} - 1 \right] \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В случае независимых отказов $\lambda_1 = \lambda_{12}$ и $\lambda_2 = \lambda_{21}$, а надежность системы

$$P_{\Sigma}(t) = P(B) = e^{-\lambda_2 \cdot t} + e^{-\lambda_1 \cdot t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}),$$

что совпадает с уже известными формулами.

Рассмотрим более общий случай системы из n одинаковых параллельных элементов, важный для изучения резервирования. Предположим, что интенсивность отказа каждого элемента не зависит от времени, а зависит только от числа неотказавших элементов. Если в момент t работает k элементов с вероятностью $P_k(t)$ и интенсивностью отказа каждого из них λ_k , то система находится в состоянии k . Так как $\lambda_k = \text{const}$, то для анализа удобно использовать схему “гибели и размножения”.

Из состояния k система за бесконечно малое время Δt может перейти в состояние $(k - 1)$ с вероятностью (переход в состояние $(k - 1)$ равен сумме несовместных событий – отказов одного из k элементов)

$$k \lambda_k \Delta t + O(\Delta t)$$

или остаться в состоянии k с вероятностью

$$1 - k \lambda_k \Delta t + O(\Delta t).$$

Следовательно, вероятность исправной работы k элементов в момент времени $t + \Delta t$ по формуле полных вероятностей

$$P_k(t + \Delta t) = [(k + 1) \lambda_{k+1} \Delta t + O(\Delta t)] \cdot P_{k+1}(t) + [1 - k \lambda_k \Delta t + O(\Delta t)] \cdot P_k(t) + O(\Delta t). \quad (4.19)$$

Разделив обе части (4.19) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{cases} P'_k(t) = (k + 1) \lambda_{k+1} P_{k+1}(t) - k \lambda_k P_k(t) & \text{при } k = 0, 1, \dots, n - 1, \\ P'_n(t) = -n \lambda_n P_n(t) & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (4.20)$$

Система (4.20) является системой рекуррентных дифференциальных уравнений по отношению к искомой вероятности $P_k(t)$. Для ее решения удобно использовать преобразование Лапласа. Учитывая начальные условия $P_k(0) = 0$ и $P_n(0) = 1$, что соответствует случаю включения системы с исправными элементами, находим

$$\begin{cases} s P_k(s) = (k + 1) \lambda_{k+1} P_{k+1}(s) - k \lambda_k P_k(s) & \text{при } k = 0, 1, \dots, n - 1, \\ s P_n(s) - 1 = -n \lambda_n P_n(s) & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Решая систему (4.21) относительно $P_k(s)$ и $P_n(s)$, получаем

$$P_n(s) = \frac{1}{s + n \lambda_n}, \quad (4.22)$$

$$P_k(s) = \frac{(k + 1) \lambda_{k+1} P_{k+1}(s)}{s + k \lambda_k}. \quad (4.23)$$

Подставляя последовательно в (4.23) вместо $P_{k+1}(s)$ соответствующие выражения, имеем

$$P_k(s) = \frac{(k+1)\lambda_{k+1} \cdot (k+2)\lambda_{k+2} \cdot \dots \cdot n\lambda_n}{(s+k\lambda_k) \cdot (s+(k+1)\lambda_{k+1}) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4.24)$$

В частности, при $k=0$ вероятность P_0 соответствует вероятности отказа блока

$$P_0(s) = \frac{n! \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n}{s(s+\lambda_1) \cdot (s+2\lambda_2) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)}. \quad (4.25)$$

Выражение (4.25) является изображением вероятности отказа. Оригинал $P_0(t)$ можно найти, используя формулу обращения для дробно-рациональной функции с различными полюсами. Тогда

$$P_0(t) = \frac{n! \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{st}}{s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)} ds, \quad (4.26)$$

откуда по теореме вычетов

$$\begin{aligned} P_0(t) &= n! \cdot (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) \left[\frac{1}{n! \cdot (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n)} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{-i\lambda_i t}}{N(-i\lambda_i)} \right] = \\ &= 1 + n! \cdot (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-i\lambda_i t}}{N(-i\lambda_i)}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $N = s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)$.

Очевидно, что $P_0(t)$ – вероятность того, что к моменту t не останется ни одного исправного элемента, совпадает с вероятностью отказа системы, т. е. $Q(t) = P_0(t)$.

Для нахождения среднего времени безотказной работы системы

$$T_{0\Sigma} = \int_0^\infty P_\Sigma(t) dt = \int_0^\infty [1 - P_0(t)] dt \quad (4.28)$$

умножим обе части (4.28) на e^{-st} :

$$T_{0\Sigma} e^{-st} = \int_0^\infty [1 - P_0(t)] e^{-st} dt = \frac{1}{s} - P_0(s) = \frac{s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n) - n! \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}{s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)}. \quad (4.29)$$

Устремляя в выражении (4.29) $s \rightarrow 0$ и раскрывая неопределенность, получаем

$$T_{0\Sigma} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n) - n! \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}{s(s+\lambda_1) \cdot \dots \cdot (s+n\lambda_n)} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n \lambda_j}{n! \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\lambda_i}. \quad (4.30)$$

Таким образом, рассмотренные примеры показывают, как усложняется задача нахождения надежности системы с зависимыми отказами. В общем случае задача определения надежности таких систем не решена, что вызвано затруднениями отнюдь не теоретического характера. Формулы для расчета надежности системы всегда можно получить, хотя они будут достаточно громоздкими. Основная трудность состоит в том, что нам неизвестны условные вероятности отказа одних элементов при условии отказа других, а их опытное определение требует огромного числа испытаний.

По-видимому, к оценке надежности сложных систем с зависимыми отказами, состоящих из большого числа элементов, следует подходить с неформальных позиций. Можно, например, разбить систему на такие части, которые по физике работы независимы, и считать каждую такую часть отдельным элементом. Тогда по известной надежности укрупненных элементов можно более просто найти надежность системы в целом.

На практике наиболее часто ограничиваются приблизительной оценкой надежности системы следующего вида.

1) Определяется надежность системы $P_{\Sigma\text{незав}}$, считая, что отказы элементов независимы. При этом надежность системы, как правило, завышается.

2) Рассчитывается надежность системы $P_{\Sigma\text{зав}}$, предполагая, что отказ одних элементов приводит к отказу зависимых от них элементов. Например, если для одного элемента ненадежность $Q_k \approx \lambda_k t$, а для другого $Q_{k+1} \approx \lambda_{k+1} t$, то считают, что вероятность отказа двух элементов равна сумме

$$Q_{k,k+1} \approx Q_k + Q_{k+1} \approx (\lambda_k + \lambda_{k+1})t,$$

а не произведению, как обычно. Надежность системы при этом занижается.

Результирующая (истинная) надежность системы будет заключена между найденными нижней $P_{\Sigma\text{зав}}$ и верхней $P_{\Sigma\text{незав}}$ оценками:

$$P_{\Sigma\text{зав}} < P_{\Sigma} < P_{\Sigma\text{незав}}.$$

4.3. Надежность систем с восстановлением

Предыдущий материал относился к расчету надежности систем, когда отказавшие элементы не восстанавливаются. Для большинства практических систем отказавшие элементы восстанавливаются. При учете восстановления использование аппарата случайных событий является недостаточным, необходим аппарат случайных процессов.

Изучение потоков событий (потоки отказов и восстановлений – случайные процессы) связано с исследованием переходов системы в различные состояния. Один из наиболее подходящих способов представления таких переходов – составление и анализ графа переходов системы с восстановлением. Рассмотрим суть этого метода на примере ранее изученного параллельного соединения двух невосстанавливаемых элементов (рис. 4.9).

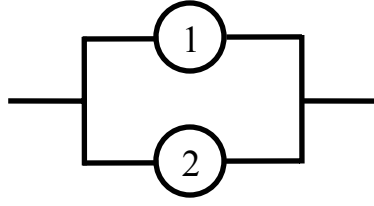


Рис. 4.9. Параллельное соединение двух элементов по надежности

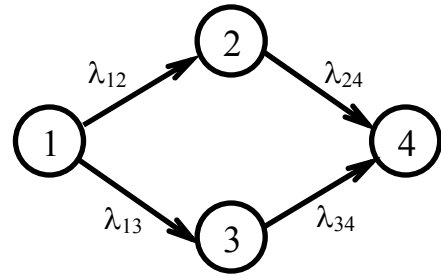


Рис. 4.10. Граф переходов

Считаем, что каждый элемент системы (см. рис. 4.9) может находиться в одном из двух состояний: работоспособность и отказ. Тогда общее число состояний системы равно четырем:

- 1 – все элементы исправны;
- 2 – отказал первый элемент, но исправен второй;
- 3 – отказал второй, но исправен первый;
- 4 – отказали оба элемента.

Составим граф перехода системы. Каждое состояние изображается в виде вершины графа, а переход между состояниями – дугами графа. Состояние 1 называют начальным, а состояние 4 – конечным (поглощающим). Граф переходов для системы (см. рис. 4.9) представлен на рис. 4.10. Вероятность пребывания системы в каждом состоянии обозначим через $P_i(t)$, а вероятность перехода из i -го состояния в j -е – через $P_{ij}(t, t + \Delta t)$.

Анализ графа состояний базируется на вычислении вероятностей состояний при условии, что известны переходные вероятности $P_{ij}(t, t + \Delta t)$ и вероятность начального состояния системы (по договоренности $P_{\text{нач}}(0) = 1$). Для решения этой задачи, используя принцип “гибели и размножения”, составляются разностные уравнения на основе формулы полной вероятности. Для первого состояния получаем

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) \cdot [1 - (P_{12}(\Delta t) + P_{13}(\Delta t))],$$

где $P_1(t + \Delta t)$ – вероятность нахождения системы в первом состоянии в момент времени $t + \Delta t$; $P_1(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии 1; $P_{12}(\Delta t) + P_{13}(\Delta t)$ – вероятность не выхода системы из состояния 1 за время Δt .

Действуя аналогично и для других состояний (2 и 3), получаем систему разностных уравнений, определяющих вероятности исправных состояний:

$$\begin{cases} P_1(t + \Delta t) = P_1(t) \cdot [1 - (P_{12}(\Delta t) + P_{13}(\Delta t))], \\ P_2(t + \Delta t) = P_2(t) \cdot [1 - P_{24}(\Delta t)] + P_1(t)P_{12}(\Delta t), \\ P_3(t + \Delta t) = P_3(t) \cdot [1 - P_{34}(\Delta t)] + P_1(t)P_{13}(\Delta t). \end{cases} \quad (4.31)$$

Для произвольных законов надежности решение системы (4.31) весьма затруднительно. Поэтому практически ограничиваются случаем экспоненциальных законов, что позволяет довольно легко найти переходные вероятности:

$$\begin{aligned} P_{12}(\Delta t) &\approx \lambda_{12}\Delta t, & P_{13}(\Delta t) &\approx \lambda_{13}\Delta t, \\ P_{24}(\Delta t) &\approx \lambda_{24}\Delta t, & P_{34}(\Delta t) &\approx \lambda_{34}\Delta t. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.31) и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, от системы разностных уравнений переходим к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} P_1'(t) = -P_1(t) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}), \\ P_2'(t) = -\lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t), \\ P_3'(t) = -\lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{13}P_1(t). \end{cases} \quad (4.33)$$

Полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами дает возможность найти вероятность каждого состояния системы. Для решения системы (4.33) наиболее удобно использовать преобразование Лапласа. Пусть $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = \lambda$, тогда (учитывая начальные условия $P_1(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = 0$) получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} sP_1(s) - 1 = -2\lambda P_1(s), \\ sP_2(s) = -\lambda P_2(s) + \lambda P_1(s), \\ sP_3(s) = -\lambda P_3(s) + \lambda P_1(s), \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\begin{cases} P_1(s) = \frac{1}{s + 2\lambda}, \\ P_2(s) = \frac{\lambda P_1(s)}{s + \lambda} = \frac{\lambda}{(s + \lambda)(s + 2\lambda)}, \\ P_3(s) = \frac{\lambda P_1(s)}{s + \lambda} = P_2(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)(s + 2\lambda)}. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам

$$\begin{cases} P_1(t) = e^{-2\lambda t}, \\ P_2(t) = P_3(t) = e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} \end{cases}$$

и вычисляя затем вероятность исправной работы системы $P(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$, получим, например, для $\lambda = 0,001$ и $t = 100$, вероятность исправной работы системы (см. рис. 4.9, 4.10) $P(100) = 0,991$.

Анализ системы (4.33) позволяет сформулировать общее правило, позволяющее записать систему дифференциальных уравнений непосредственно по графу переходов (только для экспоненциальных законов):

система содержит столько уравнений, сколько состояний, исключая поглощающее, имеет граф. В левой части k -го уравнения записываются производные вероятностей состояний $P_k'(t)$, а в правой части содержится столько слагаемых, сколько стрелок графа связано с данным состоянием. Слагаемое имеет знак “+”, если стрелка направлена к вершине (в данное состояние), и знак “-”, если ребро графа выходит из вершины. Каждое слагаемое равно произведению вероятности того состояния, из которого выходит стрелка, на интенсивность потока отказов (или восстановлений), выводящего систему из этого состояния по данной стрелке.

Метод, основанный на составлении и анализе графа переходов, является одним из наиболее эффективных методов расчета надежности систем с восстановлением. В качестве примера его применения, рассмотрим простейшую систему (см. рис. 4.9), граф переходов которой с учетом процессов восстановления показан на рис. 4.11.

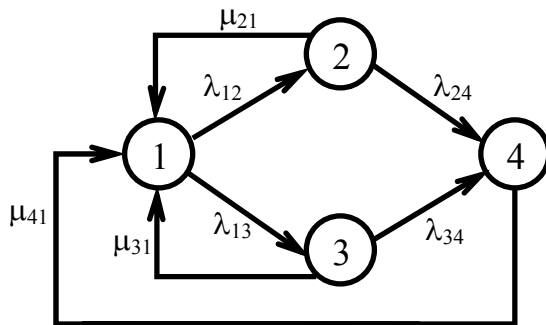


Рис. 4.11. Граф переходов системы с восстановлением

Применяя изложенное выше правило, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{13}P_1(t) + \mu_{21}P_2(t) + \mu_{31}P_3(t) + \mu_{41}P_4(t), \\ P_2'(t) = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{24}P_2(t) - \mu_{21}P_2(t), \\ P_3'(t) = \lambda_{13}P_1(t) - \lambda_{34}P_3(t) - \mu_{31}P_3(t), \\ P_4'(t) = \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t) - \mu_{41}P_4(t), \end{cases}$$

решая которую операторным методом (при $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = \lambda$ и $\mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{41} = \mu$), получаем

$$\begin{cases} sP_1(s) - 1 = -2\lambda P_1(s) + \mu(P_2(s) + P_3(s) + P_4(s)), \\ sP_2(s) = \lambda(P_1(s) - P_2(s)) - \mu P_2(s), \\ sP_3(s) = \lambda(P_1(s) - P_3(s)) - \mu P_3(s), \\ P_4(s) = \lambda(P_2(s) + P_3(s)) - \mu P_4(s), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} P_1(s)(s + 2\lambda) - \mu P_2(s) - \mu P_3(s) - \mu P_4(s) = 1, \\ -\lambda P_1(s) + P_2(s)(s + \lambda + \mu) = 0, \\ -\lambda P_1(s) + P_3(s)(s + \lambda + \mu) = 0, \\ -\lambda P_2(s) - \lambda P_3(s) + (1 + \mu)P_4(s) = 0. \end{cases}$$

Тогда, решая последнюю систему уравнений (например, при $\lambda = 0,001$ и $\mu = 0,01$), находим

$$\begin{cases} P_1(s) = 505 \frac{1000s + 11}{505000s^2 + 6565s + 1}, \\ P_2(s) = P_3(s) = \frac{505}{505000s^2 + 6565s + 1}, \\ P_4(s) = \frac{1}{505000s^2 + 6565s + 1}. \end{cases} \quad (4.34)$$

Применяя к (4.34) обратное преобразование Лапласа, окончательно получаем

$$\begin{cases} P_1(t) = e^{-6,5 \cdot 10^{-3}t} \text{ch}(6,35 \cdot 10^{-3}t) + 0,709e^{-6,5 \cdot 10^{-3}t} \text{sh}(6,35 \cdot 10^{-3}t), \\ P_2(t) = P_3(t) = 0,158e^{-6,5 \cdot 10^{-3}t} \text{sh}(6,35 \cdot 10^{-3}t), \\ P_4(t) = 3,12 \cdot 10^{-4} e^{-6,5 \cdot 10^{-3}t} \text{sh}(6,35 \cdot 10^{-3}t). \end{cases}$$

Таким образом, очевидно, что анализ сложной системы с большим количеством элементов с использованием графа переходов приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений высокого порядка, интегрирование которой хотя и не представляет принципиальных трудностей, но требует значительной работы. Поэтому во многих случаях можно ограничиться анализом стационарных вероятностей, которые могут установиться в системе при $t \rightarrow \infty$. Для этого необходимо убедиться в том, что такой стационарный режим существует, т. е. система устойчива (для проверки данного утверждения разработаны несложные критерии). Если стационарный режим существует, то $P_i'(t) = 0$ и система дифференциальных уравнений переходит в систему линейных алгебраических уравнений, решение которой (обычно численное) найти значительно проще.

5. ИЗБЫТОЧНОСТЬ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Структура системы по надежности определяется по принципиальным и конструктивным схемам объекта в соответствии с результатами анализа отказов элементов и системы в целом. С точки зрения надежности результат расчетов по этой схеме может либо укладываться в нормы надежности, но чаще всего результирующая надежность оказывается ниже требуемой.

Одним из мощных путей повышения надежности является введение в систему избыточности. *Избыточность* – это дополнительные средства (возможности) сверх минимально необходимых для выполнения системой заданных функций в заданных условиях эксплуатации. Существующие виды избыточности показаны на рис. 5.1.

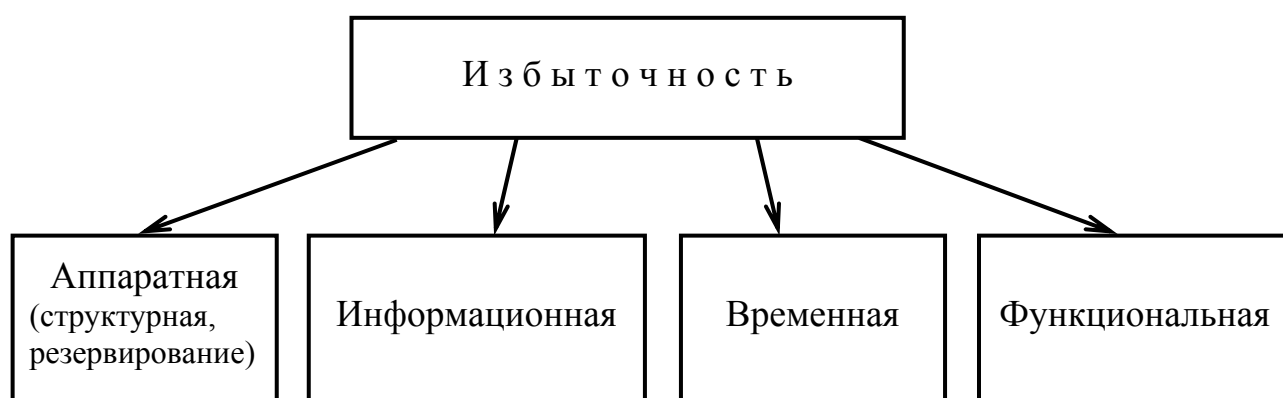


Рис. 5.1. Виды избыточности

Аппаратная (структурная) избыточность реализуется за счет введения в систему дополнительных элементов (блоков, узлов, подсистем), при этом схема и устройство системы усложняется.

Информационная избыточность в применении дополнительных данных, специальных алгоритмов и чаще всего реализуется программными средствами (нет видимого усложнения системы).

Временная избыточность предполагает наличие в системе резервных временных интервалов, которые могут использоваться для контроля аппаратуры, уточнения данных, повторного счета наиболее важных результатов.

Функциональная избыточность состоит в использовании таких элементов системы, которые способны полностью или частично выполнять функции отказавших элементов. Сегодня данный тип избыточности наиболее часто встречается в основном в биологических и социальных системах.

В системах с высокой ценой отказа (в том числе и в системах разового применения) наиболее широкое распространение получили аппаратный и информационный виды избыточности.

5.1. Аппаратная избыточность

Аппаратная избыточность как средство повышения надежности системы появилась исторически первой и получила название *резервирования*. Резервирование предполагает наличие в системе некоторых резервных блоков, которые по мере выхода из строя основных элементов последовательно подключаются на место отказавшего элемента и выполняют его функции. Резервирование, в принципе, позволяет получить сколь угодно надежную систему.

В зависимости от того, в каком состоянии находятся резервные элементы до момента отказа основного элемента, различают следующие виды резервирования.

1) Нагруженный (горячий) резерв. Резервные элементы находятся в том же режиме работы, что и основные элементы.

2) Ненагруженный (холодный) резерв. Резервные элементы находятся в выключенном, нерабочем состоянии и считается, что до момента включения в работу они отказать не могут.

3) Облегченный (теплый) резерв. Резервные элементы находятся во время ожидания в облегченном режиме. Они могут за это время отказать, но с вероятностью меньшей, чем вероятность отказа основного элемента.

В дальнейшем остановимся лишь на резервировании без восстановления, т. е. будем считать, что отказавшие элементы не восстанавливаются. Также полагаем, что замена отказавшего элемента исправным (резервным) происходит мгновенно.

5.1.1. Нагруженный резерв

В соответствии с определением, резервирование всегда предполагает наличие в системе двух новых элементов (рис. 5.2.) – переключающего устройства (ПУ) и индикатора отказов (ИО).

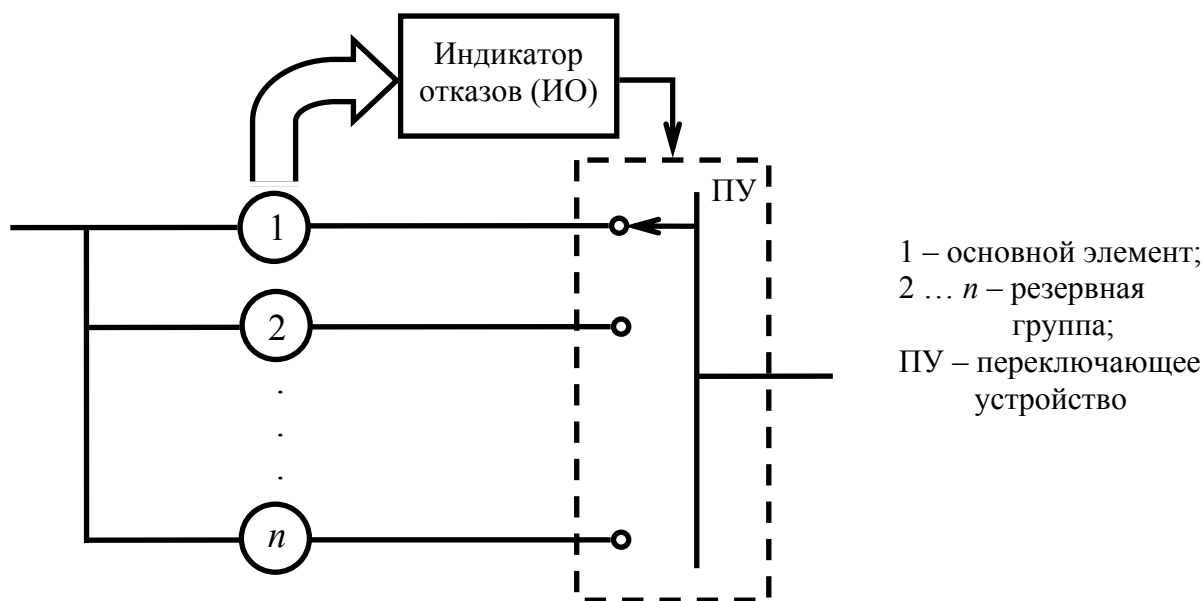


Рис. 5.2. Структурная схема системы из одного рабочего и $n - 1$ резервных элементов

Основная функция переключающего устройства заключается в переключении элементов по мере их отказа на резервные. Индикатор отказов необходим для обнаружения отказавшего элемента и выдачи команды на переключающее устройство для попытки перехода на очередной резервный элемент. Строгий анализ надежности такой системы предполагает учет надежности этих дополнительных элементов, так как они не являются абсолютно надежными. На первом этапе обычно пренебрегают вероятностью отказа переключателя и индикатора отказов, получая верхнюю оценку надежности резервной группы. При этих предположениях расчетная схема упрощается до параллельной структуры и справедливы все ранее полученные зависимости для параллельной структуры (пункт 4.1.2).

В случае нагруженного резерва все элементы работают в одинаковом режиме, поэтому надежность каждого из них не зависит от времени отказа других элементов. В момент отказа основного элемента он отключается, и подключается первый резервный элемент. Обозначим (как и ранее) $P_i(t)$, $Q_i(t)$ – надежность и ненадежность (вероятность отказа) i -го элемента системы; $P_\Sigma(t)$, $Q_\Sigma(t)$ – вероятности исправной работы и отказа системы.

Поскольку отказавшие элементы не восстанавливаются, то отказ системы произойдет тогда, когда откажет последний работающий элемент, т. е. это событие состоит в совместном выполнении n независимых событий – отказов элементов. Согласно соотношениям, полученным в пункте 4.1.2, вероятность отказа системы

$$Q_\Sigma(t) = \prod_{i=1}^n Q_i(t), \quad (5.1)$$

а вероятность исправной работы системы

$$P_\Sigma(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_i(t)]. \quad (5.2)$$

Из формул (5.1, 5.2), в частности, следует, что порядок включения элементов резервной группы не влияет на надежность системы.

На практике резервирование обычно происходит одинаковыми (равнонадежными) элементами, поэтому

$$Q_\Sigma(t) = Q^n(t), \quad P_\Sigma(t) = 1 - [1 - P(t)]^n, \quad (5.3)$$

где n – кратность резерва.

Найдем кратность резерва для обеспечения требуемой надежности системы $Q_\Sigma(t)$, если известна ненадежность элемента $Q(t)$. Логарифмируя первое соотношение (5.3), имеем

$$n \geq \frac{\ln Q_\Sigma(t)}{\ln Q(t)}. \quad (5.4)$$

С другой стороны, задаваясь числом резервных элементов n , можно найти требуемую ненадежность каждого из них:

$$Q(t) = \sqrt[n]{Q_\Sigma(t)}. \quad (5.5)$$

Среднее время безотказной работы T_{0_Σ} , частота $q_\Sigma(t)$ и интенсивность $\lambda_\Sigma(t)$ отказов резервированной системы находятся так же, как в пункте 4.1.2:

$$T_{0_\Sigma} = \int_0^\infty P_\Sigma(t) dt, \quad q_\Sigma(t) = Q'_\Sigma(t), \quad \lambda_\Sigma(t) = \frac{q_\Sigma(t)}{P_\Sigma(t)}. \quad (5.6)$$

В общем случае для произвольных законов надежности анализ резервной группы производится численными методами.

Рассмотрим частный случай экспоненциального закона надежности элементов системы. Согласно выражениям (4.11 – 4.13), имеем следующие соотношения:

$$Q_\Sigma(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad P_\Sigma(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad (5.7)$$

$$q_\Sigma(t) = \lambda n (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad (5.8)$$

$$T_{0_\Sigma} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right), \quad (5.9)$$

$$\lambda_\Sigma(t) = \left[\lambda n (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t} \right] / \left[1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \right]. \quad (5.10)$$

На рис. 5.3 показано влияние кратности резерва на основные характеристики надежности резервированной системы (для экспоненциального закона).

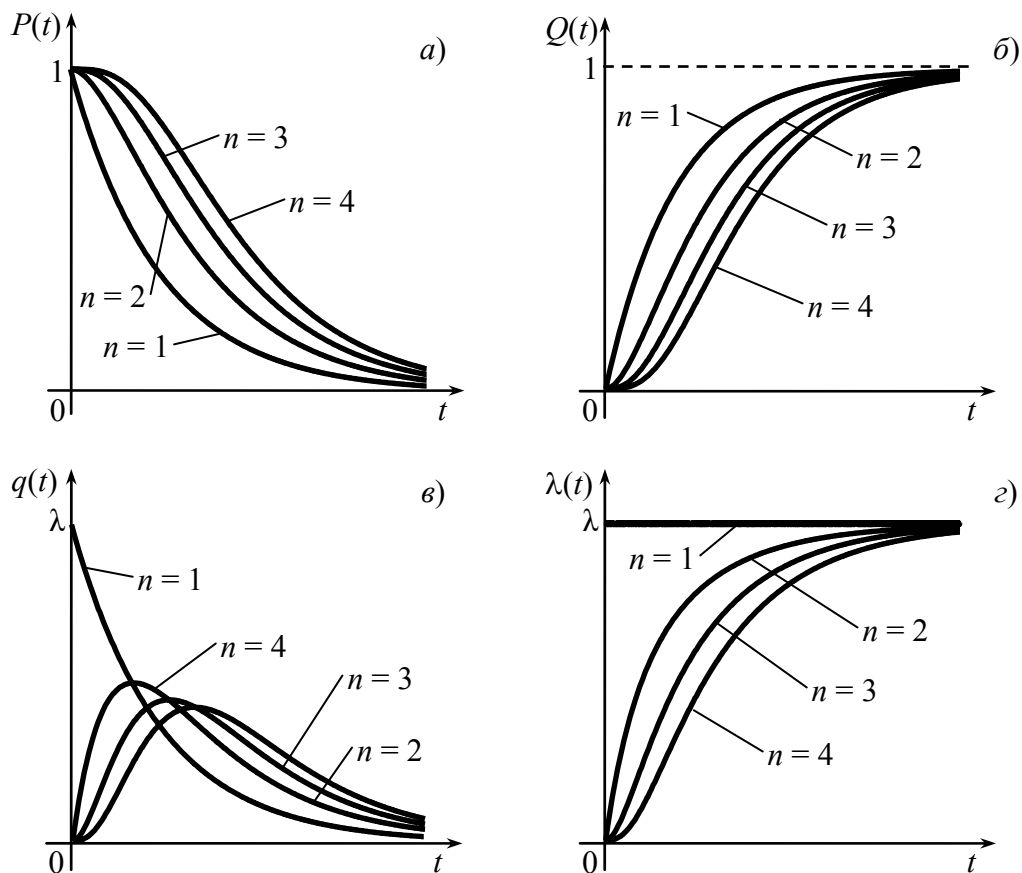


Рис. 5.3. Зависимость основных показателей надежности от кратности резерва

Для высоконадежных систем на малых интервалах ($\lambda t \leq 0,2$) выражения (5.7 – 5.10) можно линеаризовать: $1 - e^{-\lambda t} \approx \lambda t$. Следовательно,

$$Q_{\Sigma}(t) = (\lambda t)^n, \quad P_{\Sigma}(t) = 1 - (\lambda t)^n, \quad (5.11)$$

$$q_{\Sigma}(t) = \lambda n(1 - \lambda t)(\lambda t)^{n-1}, \quad (5.12)$$

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \frac{\lambda^n n t^{n-1}}{1 + \lambda t + (\lambda t)^2 + \dots + (\lambda t)^{n-1}}. \quad (5.13)$$

Из анализа полученных формул (5.7 – 5.10) и кривых (см. рис. 5.3) можно сделать следующие выводы.

1. Вероятность безотказной работы резервированной системы всегда больше, чем нерезервированной, причем, чем выше кратность резерва, тем больше вероятность исправной работы. Существенно, что эффективность нагруженного резерва особенно заметна на малых интервалах (порядка значений $(0,1 - 0,2)\lambda t$) работы системы и уменьшается по мере роста t , так как характеристики надежности приближаются к характеристикам системы без резерва.

2. Среднее время безотказной работы $T_{0\Sigma}$ системы, рассчитываемое по выражению (5.9), с увеличением кратности резерва растет чрезвычайно медленно. Поэтому нагруженный резерв целесообразно применять для систем, у которых важна малая вероятность отказа на ограниченном промежутке времени.

3. Частота отказов резервированной системы при любой кратности резерва начинается с нуля, имеет максимум и затем стремится в области больших значений λt к частоте отказов нерезервированной системы. Причем максимум частоты с увеличением кратности резервирования уменьшается и смещается вправо в область больших значений λt .

4. Кривая интенсивности отказов резервированной системы начинается всегда с нуля и приближается в области больших значений λt к интенсивности отказов системы без резерва.

5. Надежность резервированной системы не зависит от порядка включения резервных элементов.

Низкая надежность системы с нагруженным резервом при больших значениях λt физически объясняется тем, что резервные элементы всегда работают в рабочем режиме и могут отказать еще до начала их использования.

В тоже время, для многих систем применение нагруженного резерва является единственно возможным способом повышения надежности. Например, в системах, когда время переключения на резервные элементы должно быть мало, чтобы не нарушать нормального функционирования системы. В таких системах не допустимы переходные процессы, связанные с выходом на рабочий режим, так как даже кратковременный перерыв приводит к аварии. Например, в САУ летательных аппаратов применяется нагруженный резерв основных элементов (бортовых ЭВМ, рулевых приводов, источников питания и т. д.), в САУ мощными технологическими процессами (электростанции, металлургическое и химическое производство), в медицинской технике.

Нагруженный резерв, как правило, имеет ограниченную кратность, что обусловлено следующими причинами: увеличением массогабаритных характеристик системы; ростом энергопотребления; возрастанием сложности и уменьшением надежности переключающего устройства. Поэтому практически используемая кратность резерва лежит в диапазоне 2–4.

5.1.2. Оценка эффективности резервирования

При использовании любого типа избыточности необходимо количественно оценить ее эффективность. Выбор критерия оценки является неформальным и должен согласовываться со смыслом задачи. Очевидно, что всякая функция выигрыша должна быть неотрицательной и равной нулю, если выигрыш отсутствует. Для нагруженного резерва, учитывая его особенности, выигрыш от резервирования целесообразно оценивать по величине вероятности отказа.

Для количественной оценки эффективности резервирования вводят понятие выигрыша надежности (в абсолютном или относительном виде). Относительные функции выигрыша по вероятности отказа, по вероятности безотказной работы и по среднему времени безотказной работы имеют вид

$$V_Q(t) = \frac{Q_\Sigma(t)}{Q(t)}, \quad (5.14)$$

$$V_P(t) = \frac{P_\Sigma(t)}{P(t)}, \quad (5.15)$$

$$V_T = \frac{T_{0\Sigma}}{T}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим поведение функций выигрыша для экспоненциального закона надежности:

$$V_Q(t) = \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{1 - e^{-\lambda t}} = (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad (5.17)$$

$$V_P(t) = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda t})^n}{e^{-\lambda t}}, \quad (5.18)$$

$$V_T(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{i+1} \right). \quad (5.19)$$

Из (5.18) видно, что выигрыш по вероятности безотказной работы растет с ростом времени и кратности резервирования (рис. 5.4). В частности, при малых λt

$$V_P(t) \cong 1 + \lambda t + (\lambda t)^2 + \dots + (\lambda t)^{n-1} \approx 1 + \lambda t, \quad (5.20)$$

т. е. выигрыш растет пропорционально времени работы системы. С другой стороны, при больших λt ($t \rightarrow \infty$) $V_P(t) \rightarrow n$.

Анализ выражения (5.18) и рис. 5.4 показывает, что повышение кратности резерва для систем с малым временем работы нецелесообразно. Напротив, чем

больше время работы системы, тем больше возрастает выигрыш по вероятности исправной работы.

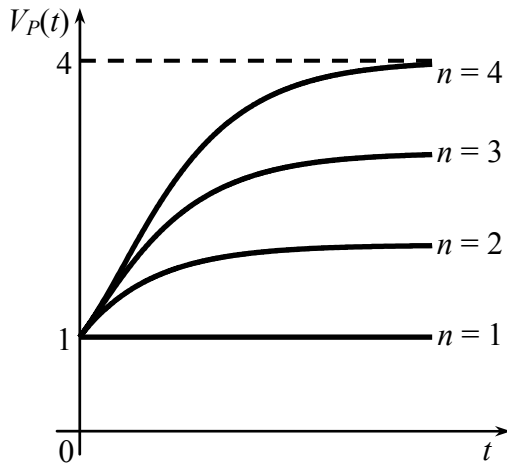


Рис. 5.4. Функция выигрыша по вероятности безотказной работы (n – кратность резерва)

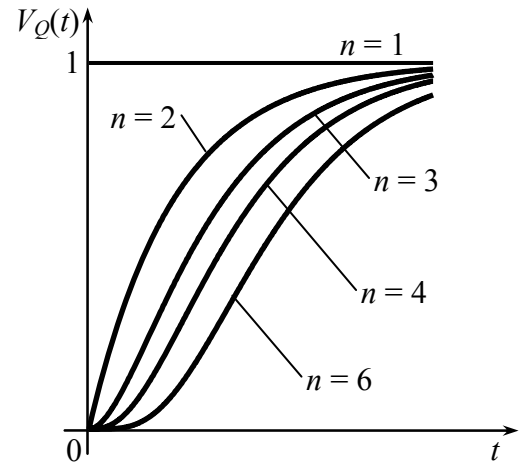


Рис. 5.5. Функция выигрыша по вероятности отказа (n – кратность резерва)

Оценим выигрыш по вероятности отказов (5.17). Как показано выше, при малых λt имеем

$$V_Q(t) \approx (\lambda t)^{n-1}, \quad (5.21)$$

т. е. увеличение кратности резерва ведет к существенному снижению вероятности отказа. Наоборот, в области больших λt выигрыш по вероятности отказов уменьшается и асимптотически стремится к единице (рис. 5.5).

Если исследовать выигрыш по среднему времени безотказной работы, то, согласно выражению (5.9), повышение кратности резерва слабо отражается на этой характеристике.

Рассмотрим поведение абсолютных функций выигрыша по вероятности отказа и вероятности безотказной работы:

$$V_Q(t) = Q(t) - Q_\Sigma(t), \quad (5.22)$$

$$V_P(t) = P_\Sigma(t) - P(t) = (1 - Q_\Sigma(t)) - (1 - Q(t)) = Q(t) - Q_\Sigma(t) = V_Q(t). \quad (5.23)$$

Для экспоненциального закона надежности получаем, что

$$V_Q(t) = V_P(t) = 1 - e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad (5.24)$$

$$V_Q^{(1)}(t) = V_P^{(1)}(t) = 0,$$

$$V_Q^{(2)}(t) = V_P^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\lambda t})^2 = e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}.$$

На рис. 5.6 изображены зависимости абсолютных функций выигрыша $V_Q(t)$ и $V_P(t)$ от времени и кратности резервирования. Графики (см. рис. 5.6) показывают, что наибольший выигрыш (как по вероятности отказа, так и по вероятности безотказной работы) достигается в области малых времен работы системы.

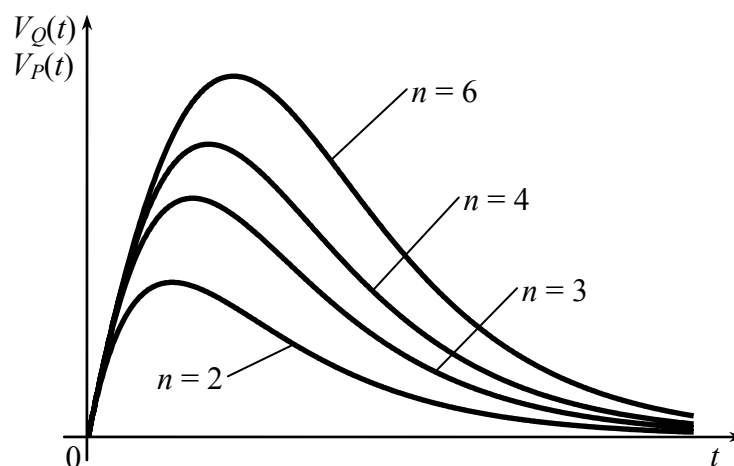


Рис. 5.6. Функции выигрыша в абсолютной форме (n – кратность резерва)

Представленные выше противоречивые, в общем-то, выводы свидетельствуют, прежде всего о том, что надежность, свойство аппаратуры, является комплексным и сложным понятием, которое невозможно однозначно охарактеризовать какой-либо одной количественной характеристикой.

Установим границы целесообразности применения нагруженного резерва. Известно (2.5, 4.12), что среднее время безотказной работы есть площадь, ограниченная кривой вероятности безотказной работы (см. рис. 2.1). Так как эти кривые для резервированной и нерезервированной систем существенно отличаются лишь при малых λt , то площади подинтегральных кривых (суть средние времена) для обоих типов систем отличаются незначительно. Это означает, что нагруженный резерв не дает эффекта для систем, предназначенных для длительной работы, и его целесообразно применять в системах с коротким временем работы, например, системы управления ракетами, системы разового действия и т. п. При этом наиболее выгодно в качестве критерия оценки выигрыша резервирования применять выигрыш по вероятности отказов, так как чем ниже $V_Q(t)$, тем меньше вероятность отказов резервированной системы и тем выше абсолютное значение вероятности безотказной работы.

Следует отметить, что нагруженный резерв при низкой надежности элементов не позволяет существенно улучшить надежность системы в течение заданного времени при ограниченной кратности резерва ($n = 2, 3, 4$). Естественно, что практически кратность резервирования необходимо выбирать, исходя также из допустимых веса, габаритов, потребления энергии и т. д., для чего требуется более сложный критерий оценки выигрыша. В настоящее время такие критерии находятся в стадии разработки.

Часто нагруженное резервирование заключается в параллельном присоединении к основному элементу аналогичных резервных (без переключающего устройства), например, параллельное соединение ламп, транзисторов, диодов и т. п. При этом с выходом из строя одного элемента надежность остальных (резервных) изменяется, по причине, например, увеличения мощности рассеивания на каждом

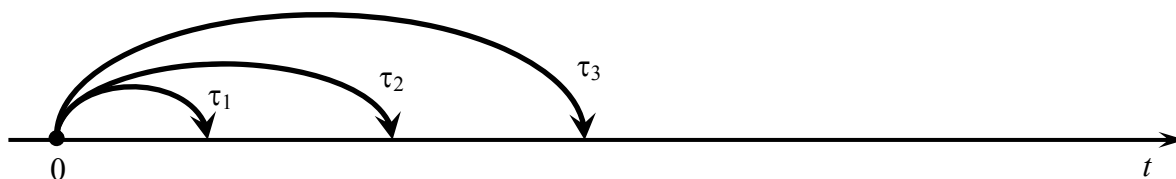
элементе. Для анализа этого более сложного случая можно использовать рассмотренные ранее способы расчета надежности систем с зависимыми отказами.

5.1.3. Ненагруженный резерв

Оставаясь в рамках тех же допущений, что для нагруженного резерва, система с ненагруженным резервированием имеет следующую схему работы (рис. 5.7). Основной элемент, проработав некоторое случайное время τ_1 , выходит из строя и на его место ставится первый резервный элемент, который работает случайное время τ_2 и т. д. Последний резервный элемент функционирует случайное время τ_n и выходит из строя, а вместе с ним и вся резервная группа. Таким образом, случайное время жизни системы при холодном резерве (считая, что длительность переходного процесса, необходимого для подготовки резервного элемента к работе, много меньше случайного времени жизни элементов) определяется как

$$\tau_{\Sigma} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = \sum_{i=1}^n \tau_i. \quad (5.25)$$

а) нагруженный резерв



б) ненагруженный резерв

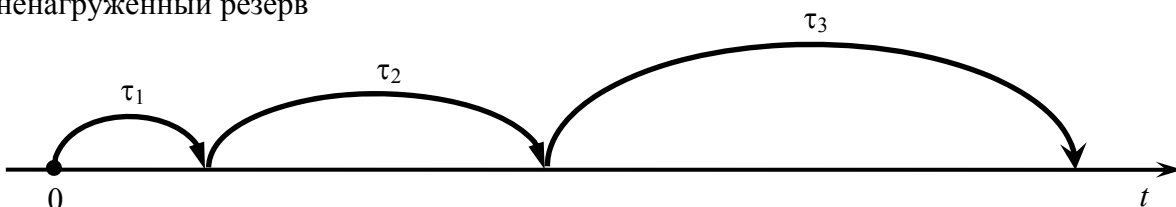


Рис. 5.7. Граф работы системы с резервированием

При анализе системы полагаем, что резервные элементы за время ожидания не отказывают (они в этом интервале не работают). Правомерность допущения связана со свойством “сохраняемость элемента” и зависит от соблюдения условий хранения. В большинстве случаев вероятность отказа элемента во время ожидания очень мала (по сравнению с вероятностью выхода из строя во время основного режима работы).

Учитывая введенные допущения, случайное время жизни системы τ_{Σ} есть сумма независимых случайных времен жизни отдельных элементов τ_i , и расчетная схема ненагруженного резерва совпадает с процессом мгновенного восстановления (см. пункт 3.1). В частности, вероятность отказа резервной группы кратности n при условии, что все элементы одинаковы (равнонадежны), согласно выражениям (3.6, 3.7), определяется следующим соотношением:

$$Q_n(t) = \int_0^t Q_{n-1}(t-\tau) dQ(\tau) = \int_0^t Q(t-\tau) dQ_{n-1}(\tau) = \int_0^t Q(t-\tau) q_{n-1}(\tau) d\tau, \quad (5.26)$$

где $Q(t)$ – вероятность отказа резервного элемента.

Таким образом, задача нахождения вероятности отказов (равно как и вероятности безотказной работы) резервированной системы состоит в вычислении n -кратной свертки законов распределения отказов.

Найдем среднее время жизни резервной группы:

$$T_\Sigma = M[\tau_\Sigma] = \sum_{i=1}^n M[\tau_i] = \sum_{i=1}^n T_{0i}. \quad (5.27)$$

Если все элементы равнонадежны, то

$$T_\Sigma = nM[\tau] = nT_0. \quad (5.28)$$

Рассмотрим частный (но важный) случай экспоненциального закона надежности элементов резервной группы, для которого $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $P(t) = e^{-\lambda t}$. Вероятность отказа группы, как следует из (3.10),

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (5.29)$$

В частности, для малых λt справедливо

$$Q_n(t) \approx \frac{(\lambda t)^n}{n!} \approx \frac{q^n(t)}{n!}. \quad (5.30)$$

Сравнивая выражение (5.30) с выражением (5.11) для вероятности отказов при нагруженном резервировании, видно, что эффективность ненагруженного резерва значительно (в $n!$ раз) выше, чем нагруженного (для $\lambda t \leq 0,2$):

$$Q_n^{\text{ненагр}}(t) = \frac{Q_n^{\text{нагр}}(t)}{n!}. \quad (5.31)$$

Сравним два вида резерва по среднему времени безотказной работы: для нагруженного резерва

$$T_\Sigma^{\text{нагр}} = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right);$$

для ненагруженного резерва

$$T_\Sigma^{\text{ненагр}} = nT_0.$$

Следовательно, выигрыш по времени

$$V_{nT} = \frac{T_\Sigma^{\text{ненагр}}}{T_\Sigma^{\text{нагр}}} = \frac{nT_0}{T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)} = n / \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (5.32)$$

Например: $V_{2T} \approx 1,33$; $V_{3T} \approx 1,64$; $V_{10T} \approx 3,41$.

Асимптотический выигрыш по времени, как следует из соотношения (4.14),

$$V_{\infty T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n + C} = \infty.$$

Таким образом, и с точки зрения среднего времени безотказной работы ненагруженный резерв эффективнее нагруженного.

Расчетная схема процесса с ненагруженным резервом совпадает со схемой процесса восстановления, но он длится не бесконечно и интервалы времени, необходимые для подготовки резервного элемента к работе, чаще всего постоянны. Поэтому, за исключением асимптотики ($t \rightarrow \infty$), можно использовать все расчетные формулы для процесса восстановления. В общем случае для расчета приходится применять численные методы и только для экспоненциальных законов можно получить аналитические результаты.

Подробный анализ вероятностей безотказной работы показывает (рис. 5.8), что они уменьшаются значительно медленнее, чем для случая нагруженного резерва. Следовательно, избыточность ненагруженным резервом целесообразно применять не только для систем с малым, но и с большим временем работы (хотя при больших t эффективность довольно резко уменьшается, и оба резерва совпадают). Физически это объясняется тем, что резервные элементы не отказывают до использования (что объясняет подъем характеристики P_{Σ}), но из-за ограниченной кратности резерва при $t \rightarrow \infty$ вероятность исправной работы резко падает.

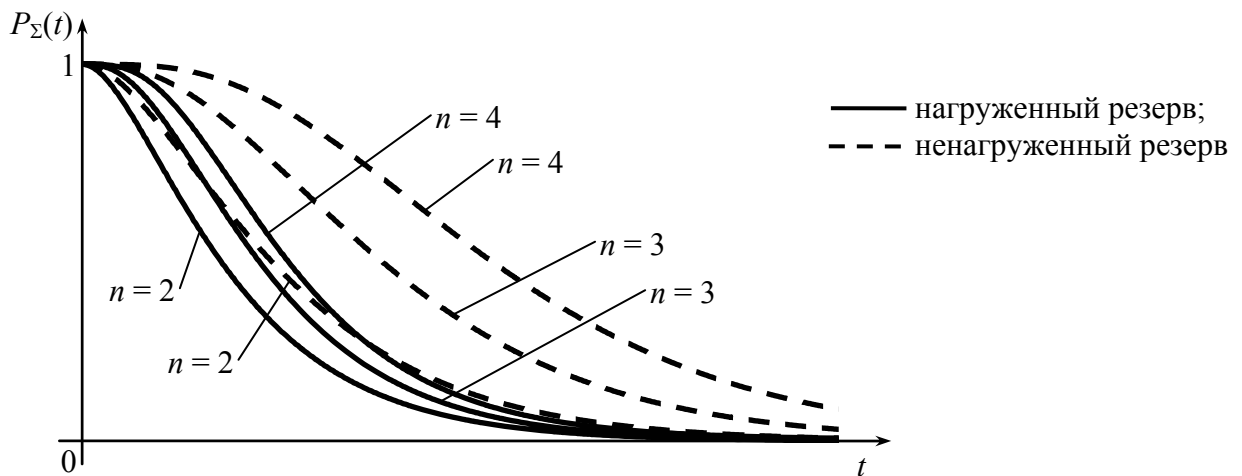


Рис. 5.8. Функции надежности нагруженного и ненагруженного резерва (при одинаковой кратности резерва)

В заключении проведем сравнительную оценку обоих способов резервирования без ограничения на закон надежности. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – случайные времена работы основного и резервного элементов. Тогда случайное время работы группы в нагруженном резерве (см. рис. 5.7)

$$\tau_{\Sigma}^{\text{нагр}} = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

а для ненагруженного резерва

$$\tau_{\Sigma}^{\text{ненагр}} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Откуда видно, что

$$\tau_{\Sigma}^{\text{ненагр}} \geq \tau_{\Sigma}^{\text{нагр}}.$$

Следовательно, с точки зрения характеристик ненадежности нагруженный резерв всегда эффективнее нагруженного. Так как резервные элементы в режиме ожидания не потребляют энергии, то ненагруженный резерв широко применяется в общепромышленных системах, когда допустимы промежутки в работе системы при переключении с основного на резервный элемент. Очевидно, что и для ненагруженного резерва порядок подключения резервных элементов не влияет на надежность системы.

5.1.4. Облегченный резерв

Во многих случаях невыгодно применять нагруженный резерв, так как из-за отказа резервных элементов он не дает желаемого выигрыша в надежности системы. Вместе с тем нельзя использовать и ненагруженный резерв, ибо от момента включения резервного элемента в работу до момента, когда элемент становится работоспособным, проходит некоторое недопустимо большое время. В этом случае применяют облегченный (теплый) резерв (рис. 5.9), при котором элемент до включения в работу находится в облегченном режиме (например, включен накал электронных ламп, но не подано анодное напряжение). При этом резервный элемент может отказать и в нерабочем состоянии, но, как правило, вероятность такого события невелика. Т. е., облегченный резерв занимает промежуточное положение по надежности между нагруженным и ненагруженным резервами.

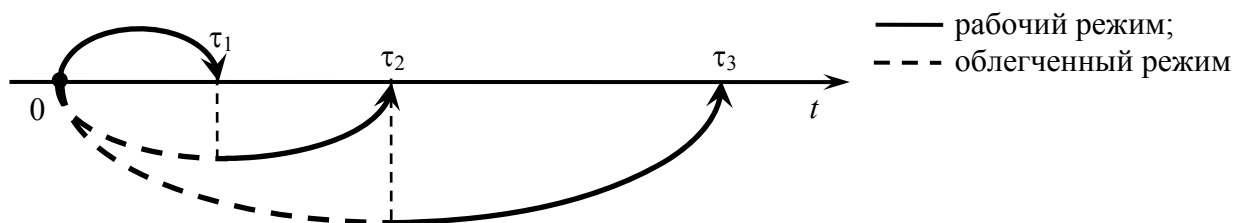


Рис. 5.9. Граф работы системы с облегченным резервом

С точки зрения надежности, элементы при облегченном резерве работают в различных условиях и поэтому обладают различной надежностью. Принципиальной особенностью теплового резерва является переменный режим работы элементов, причем переход от облегченного режима к рабочему происходит в случайные моменты времени. Поэтому для расчета надежности необходимо знать условные вероятностные характеристики элементов. По аналогии с зависимостью отказов, получение таких характеристик практически невозможно. В силу этого ограничиваются, в основном, оценками надежности при разных упрощающих предположениях.

Пусть система состоит из основного и $n - 1$ резервного элемента. Обозначим:

$P_k^{(H)}(\tau)$ – надежность k -го элемента в нерабочем (облегченном) состоянии;

$P_k^{(p)}(\tau, t)$ – условная вероятность того, что k -й элемент не откажет, работая на участке (τ, t) , при условии, что он не отказал на участке $(0, \tau)$;

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – случайные времена жизни элементов (с переменной надежностью).

Тогда $k + 1$ элемент включается в момент времени (см. рис. 5.9)

$$T_k = \max_{1 \leq i \leq k} \tau_i. \quad (5.33)$$

Для нахождения распределения случайной величины T_k вычислим вероятность события $T_{k+1} < t$. Так как

$$Q_k(t) = P\{T_k < t\} \quad (5.34)$$

(заметим, что $Q_1(t)$ – вероятность отказа основного элемента, $Q_k(t)$ – ненадежность резервной группы, $Q_n(t)$ – искомая ненадежность всей системы), то для нахождения $P\{T_{k+1} < t\}$ воспользуемся формулой полной вероятности.

Предположим, что отказ k -го элемента произошел в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{T_{k+1} < t\} &= Q_{k+1}(t), \\ P\{\tau < T_k < \tau + d\tau\} &= q_k(\tau) d\tau = dQ_k(\tau). \end{aligned} \quad (5.35)$$

До момента времени τ $(k + 1)$ -й элемент работал в облегченном режиме и к моменту τ не отказал с вероятностью $P_{k+1}^{(H)}(\tau)$. Начиная с момента времени τ , $(k + 1)$ -й элемент работает в рабочем режиме, и он не откажет на (τ, t) с вероятностью $P_{k+1}^{(p)}(\tau, t)$.

Вероятность исправной работы $(k + 1)$ -го элемента на интервале $(0, t)$:

$$P_{k+1}(\tau, t) = P\left\{\frac{A}{B}\right\},$$

где событие A – исправная работа элемента на (τ, t) при выполнении события B – исправной работе элемента на $(0, \tau)$.

Согласно формуле полных вероятностей, получаем

$$P_{k+1}(\tau, t) = P_{k+1}^{(H)}(\tau) \cdot P_{k+1}^{(p)}(\tau, t). \quad (5.36)$$

Тогда вероятность отказа $(k + 1)$ -го элемента на интервале $(0, t)$

$$Q_{k+1}(\tau, t) = 1 - P_{k+1}^{(H)}(\tau) \cdot P_{k+1}^{(p)}(\tau, t). \quad (5.37)$$

Искомую полную вероятность отказа, учитывая (5.35), находим, интегрируя соотношение (5.37) по параметру τ от 0 до t :

$$Q_{k+1}(t) = Q_{k+1}(\tau, t) = \int_0^t [1 - P_{k+1}^{(H)}(\tau) \cdot P_{k+1}^{(p)}(\tau, t)] dQ_k(\tau). \quad (5.38)$$

Формула (5.38) является рекуррентной, и непосредственные расчеты по ней требуют знание двумерного закона распределения $P_{k+1}^{(p)}(\tau, t)$, что практически невозможно из-за большого числа экспериментальных исследований. Эта ситуация

аналогична той, что и при анализе систем с зависимыми отказами. Для упрощения расчетов обычно, в первом приближении, полагают, что пребывание элемента в нерабочем состоянии (режиме ожидания) не изменяет его надежности в рабочем состоянии. При этом

$$P_{k+1}^{(p)}(\tau, t) = P_{k+1}^{(p)}(t - \tau). \quad (5.39)$$

Поскольку распределение времени жизни в рабочем режиме $P_{k+1}^{(p)}(t)$ известно, то формулами (5.38, 5.39) уже можно пользоваться для практических расчетов.

В частном случае нагруженного резерва вероятность безотказной работы: в нерабочем режиме

$$P_{k+1}^{(H)}(\tau) = P_{k+1}(\tau); \quad (5.40)$$

в рабочем режиме

$$P_{k+1}^{(p)}(\tau, t) = \frac{P_{k+1}(t)}{P_{k+1}(\tau)}. \quad (5.41)$$

Соответствующие вероятности для ненагруженного резерва:

$$P_{k+1}^{(H)}(\tau) = 1, \quad P_{k+1}^{(p)}(\tau, t) = P_{k+1}^{(p)}(t - \tau). \quad (5.42)$$

Подробный анализ характеристик надежности облегченного резерва показывает промежуточное положение теплового резерва (рис. 5.10). Но даже существенное облегчение режимов работы резервных групп значительно снижает надежность всей системы по сравнению с ненагруженным резервом.

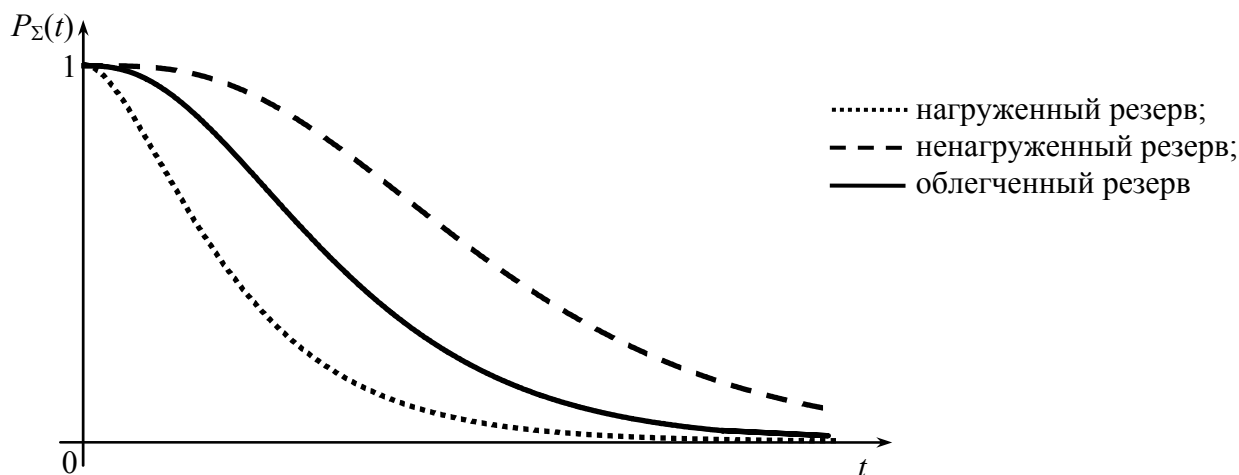


Рис. 5.10. Функции надежности нагруженного, ненагруженного и облегченного резерва (при одинаковой кратности резерва)

При облегченном резерве, если надежности элементов различные, то надежность системы зависит от порядка включения элементов (в отличие от двух предыдущих видов резерва). Например, если у двух элементов одинаковые надежности в рабочем режиме, но разные в режиме ожидания, то первым нужно использовать тот элемент, который имеет большую вероятность отказа в режиме ожидания. Если же элементы имеют одинаковую надежность в режиме ожидания, то

сначала надо использовать элемент, имеющий большую надежность в рабочем режиме. Облегченный резерв находит ограниченное применение, так как по технологии применения его реализация бывает затруднена.

Изложенные выше способы резервирования не исчерпывают всех возможных вариантов (например, рис. 5.11).

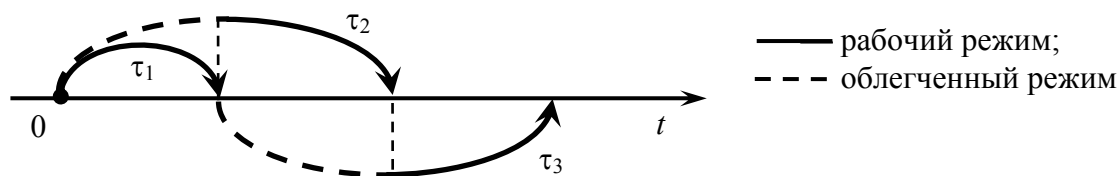


Рис. 5.11. Вариант резервирования

Иногда резервирование элементов выполняется при помощи параллельного соединения без переключающих устройств. Например, в рулевых приводах самолетов используется параллельное включение гидроцилиндров, работающих на общую нагрузку. При этом резервные элементы работают в различных режимах, так как при отказах нагрузки на них суммируются. Поэтому расчет их надежности нельзя проводить по схемам с переключателем (см. предыдущие пункты), а приходится использовать схемы расчета с зависимыми отказами.

5.1.5. Скользящий резерв

Обычно в любой системе всегда имеются группы одинаковых элементов. В этом случае вместо резервирования каждого такого элемента в отдельности можно объединить все резервные элементы в одну группу, образуя так называемый *скользящий резерв*. Рассмотрим характеристики простейшей системы со скользящим резервом (рис. 5.12).

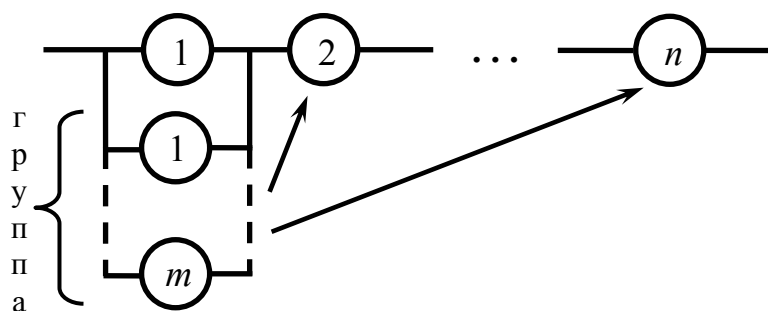


Рис. 5.12. Система со скользящим резервом

При таком способе резервирования имеется группа из n одинаковых (или взаимозаменяемых) основных элементов и группа из m резервных элементов. При отказе одного из основных элементов он заменяется очередным резервным. Если резервные элементы не восстанавливаются, то отказ всей резервной группы наступает в момент отказа одного из основных элементов после того, как отказали

все резервные элементы (либо они все уже были использованы для замены, либо отказали в режиме ожидания).

Проанализируем простейшие случаи скользящего резерва, считая, что все элементы однотипные с одинаковыми характеристиками надежности.

а. Нагруженный скользящий резерв

Очевидно, что резервная группа не откажет за время t (система исправна) тогда и только тогда, когда за это время произойдет не более m отказов элементов. Поскольку все элементы работают в одинаковом режиме независимо друг от друга, то расчетная схема совпадает со схемой независимых испытаний Бернулли. Поэтому вероятность исправной работы системы на интервале $(0, t)$

$$P_{\Sigma}(t) = \sum_{k=0}^m C_{m+n}^k Q^k(t) P^{m+n-k}(t), \quad (5.43)$$

где $P(t)$, $Q(t)$ – функция надежности и вероятность отказа одинаковых элементов соответственно.

Как видно, расчеты по выражению (5.43) даже для экспоненциального закона громоздки, поэтому их в общем случае производят численно.

В частном случае одинаковых элементов и экспоненциального закона надежности удастся лишь найти среднее время безотказной работы. Обозначим через τ – случайное время между отказами. Тогда случайное время жизни системы

$$\tau_{\Sigma(m)}^{\text{скол}} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{m+1} \quad (5.44)$$

(за время жизни системы происходит $(m+1)$ отказов), а среднее время жизни

$$T_{\Sigma(m)}^{\text{скол}} = M[\tau_{\Sigma(m)}] = \sum_{i=1}^{m+1} M[\tau_i]. \quad (5.45)$$

До первого отказа в системе работают $(m+n)$ элементов, от первого до второго – $(m+n-1)$ элемент и т. д., т. е. перед m -м отказом работает n элементов. Откуда (для экспоненциального закона и одинаковых элементов) имеем

$$\begin{cases} M[\tau_1] = \frac{1}{\lambda(m+n)} = \frac{T_0}{m+n}, \\ M[\tau_2] = \frac{1}{\lambda(m+n-1)} = \frac{T_0}{m+n-1}, \\ \dots \\ M[\tau_{m+1}] = \frac{1}{\lambda n} = \frac{T_0}{n}. \end{cases} \quad (5.46)$$

Следовательно (согласно 5.45), получаем

$$T_{\Sigma(m)}^{\text{скол}} = T_0 \left(\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+n-1} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (5.47)$$

Сравним это время жизни (5.47) со средним временем жизни системы из n элементов, каждый из которых резервирован m элементами при нагруженном резерве (рис. 5.13).

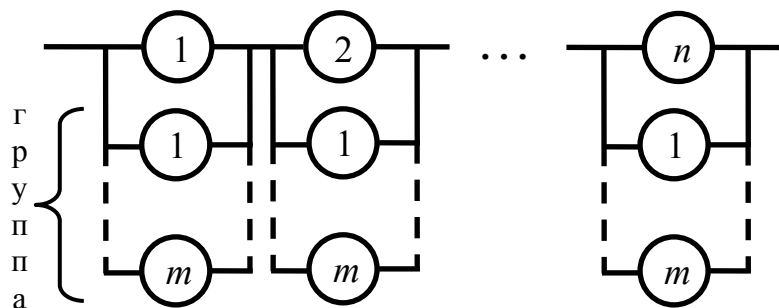


Рис. 5.13. Система из n элементов с полным нагруженным резервированием (резервные группы из m элементов)

Согласно выражению (5.9), среднее время жизни i -й группы (один основной и m резервных одинаковых элементов)

$$T_{\Gamma} = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m+1} \right). \quad (5.48)$$

Тогда, учитывая выражение (4.4), среднее время жизни системы (см. рис. 5.13)

$$T_{\Sigma}^{\text{нагр}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{\Gamma i}}} = \frac{1}{n} T_{\Gamma i} = \frac{1}{n} T_{\Gamma} = T_0 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n(m+1)} \right). \quad (5.49)$$

Например, если $n = m = 2$, то при нагруженном резерве $T_{\Sigma}^{\text{нагр}} = 0,917T_0$, а при скользящем $T_{\Sigma}^{\text{скол}} = 1,083T_0$; если $n = m = 3$, то $T_{\Sigma}^{\text{нагр}} = 0,695T_0$, $T_{\Sigma}^{\text{скол}} = 0,95T_0$.

Сравнивая выражения (5.47) и (5.49) почленно, замечаем, что для любых m и n справедливо следующее соотношение:

$$T_{\Sigma}^{\text{скол}} > T_{\Sigma}^{\text{нагр}}. \quad (5.50)$$

Таким образом, нагруженный скользящий резерв в смысле надежности и количества используемых резервных элементов эффективнее постоянного нагруженного резерва.

6. Ненагруженный скользящий резерв

В общем случае для произвольных законов надежности элементов вероятность безотказной работы системы с ненагруженным скользящим резервом сложно выражается через интегралы типа сверток или связана с многократным интегрированием законов распределения случайных времен жизни элементов системы. Поэтому рассмотрим только случай экспоненциального закона надежности. При этом, как известно (см. пункт 3.1.3), поток отказов элементов является пуассонов-

ским, и вероятность исправной работы системы может быть найдена аналитически следующим образом.

Система является работоспособной (не имеет отказов), если на интервале $(0, t)$ отказов не было, если был один отказ, два отказа и т. д. вплоть до m -го отказа. Вероятность наступления ровно k отказов на $(0, t)$ определим по формуле Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda_{\Sigma} t)^k}{k!} e^{-\lambda_{\Sigma} t}, \quad (5.51)$$

где $\lambda_{\Sigma} = \lambda n$ – интенсивность отказов системы (система в любой момент времени состоит из n элементов, а, согласно общей гипотезе, резервные элементы не отказывают в режиме ожидания); λ – интенсивность отказов элементов системы.

Тогда, применяя формулу сложения вероятностей, для надежности системы со скользящим ненагруженным резервированием получим

$$P_{\Sigma}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(\lambda_{\Sigma} t)^k}{k!} e^{-\lambda_{\Sigma} t}. \quad (5.52)$$

Сравним надежность такой системы с надежностью системы при холодном резерве (рис. 5.14), где исходная система m раз резервирована такими же системами.

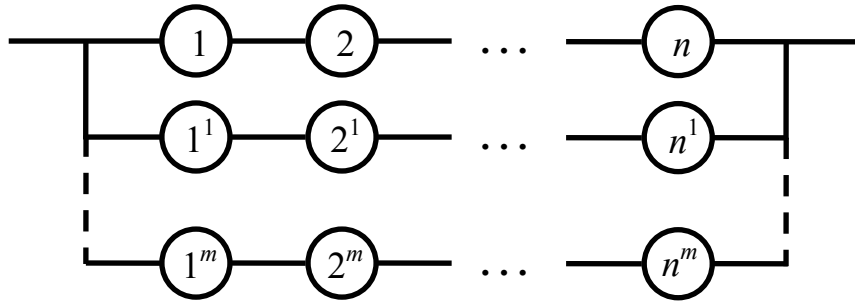


Рис. 5.14. Система из n элементов, m раз резервированная такими же системами (ненагруженный резерв)

Каждая из одинаковых параллельных систем (см. рис. 5.14) имеет интенсивность отказов $\lambda_{\Sigma} = \lambda n$, а надежность всей системы при постоянном (ненагруженном) резерве определяется (с учетом экспоненциального закона надежности элементов) по следующей формуле:

$$P_{\Sigma}^{\text{ненагр}}(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(\lambda_{\Sigma} t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_{\Sigma} t}. \quad (5.53)$$

Из сравнения формул (5.52) и (5.53) вытекает, что надежность системы при ненагруженном скользящем резерве с m элементами равна надежности системы, m раз резервированной такими же системами ($P_{\Sigma}^{\text{скол}}(t) = P_{\Sigma}^{\text{ненагр}}(t)$). Очевидно, что при одинаковой надежности получается значительный выигрыш в количестве резервных элементов, весе, габаритах и стоимости при использовании ненагруженного скользящего резерва.

При анализе других способов резервирования вывод о преимуществе скользящего резерва (с точки зрения надежности) по сравнению с постоянным резервом сохраняется. Однако при практической реализации идеи скользящего резерва следует учитывать, что каждый резервный элемент должен иметь возможность подключаться на место любого основного элемента. Это требует огромного количества связей и переключателей, не абсолютная надежность которых в значительной мере обесценивает выигрыш от скользящего резерва при автоматическом поиске и контроле неисправностей. Поэтому скользящий резерв применяется в основном только при ручном способе замены отказавшего элемента.

5.1.6. Резервирование при отказах типа короткого замыкания и обрыва

В большинстве электрических схем приходится учитывать, что отказы элементов бывают двух типов: короткое замыкание (КЗ) и обрыв, причем резервирование не всегда приводит к увеличению надежности системы. Расчет надежности таких систем необходимо при этом проводить по особой методике, учитывая три возможных состояния подобных элементов. Чаще всего для этого можно использовать *метод перебора состояний*, который пригоден для расчета надежности сложных систем.

Пусть два одинаковых элемента А и В включены с целью резервирования параллельно (рис. 5.15).

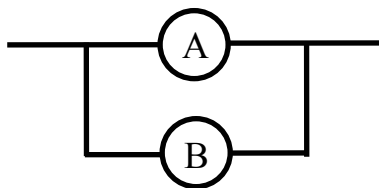


Рис. 5.15. Параллельная структура системы к методу перебора состояний

Ведем обозначений: Q_o – вероятность отказа элементов от обрыва; Q_s – вероятность отказа от КЗ. Тогда вероятность безотказной работы элемента

$$P = 1 - (Q_o + Q_s). \quad (5.54)$$

Для расчета системы (см. рис. 5.15) по методу прямого перебора, считая отказы независимыми, необходимо:

- 1) перебрать всевозможные состояния системы;
- 2) вычислить вероятность каждого возможного состояния системы;
- 3) выделить группу состояний, в которых система считается работоспособной (неработоспособной);
- 4) найти вероятность работоспособности (неработоспособности) путем суммирования соответствующих вероятностей состояний.

Такая схема является общей и применима в принципе для любых систем, если отказы элементов можно считать независимыми.

Составим таблицу (табл. 5.1) возможных состояний системы (см. рис. 5.15) и их вероятностей. Общее число состояний находится по формуле

$$N = n^m,$$

где n – число состояний элементов; m – количество элементов (для рассматриваемых системы и типов отказов $n = 3$, $m = 3$, $N = 3^2 = 9$).

Таблица 5.1

Состояния и их вероятности для элементов параллельной структуры

№	Состояние	Вероятность
1	A B (оба элемента исправны)	P^2
2	$A_s B$	$Q_s P$
3	$A_o B$	$Q_o P$
4	$A B_s$	$P Q_s$
5	$A B_o$	$P Q_o$
6	$A_o B_o$	Q_o^2
7	$A_s B_s$	Q_s^2
8	$A_o B_s$	$Q_o Q_s$
9	$A_s B_o$	$Q_s Q_o$

Из табл. 5.1 видно, что в системе три работоспособных (первое, третье и пятое) и шесть неработоспособных (все остальные) состояний. Тогда вероятность безотказной работы системы

$$P_{\Sigma} = P^2 + Q_o P + P Q_o = P^2 + 2 P Q_o, \quad (5.55)$$

а вероятность отказа системы вследствие любого типа отказов

$$\begin{aligned} Q_{\Sigma} &= 2 P Q_s + 2 Q_s Q_o + Q_s^2 + Q_o^2 = \\ &= 2 Q_s (P + Q_s + Q_o) + Q_o^2 - Q_s^2 = 2 Q_s + Q_o^2 - Q_s^2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Сравним вероятность отказа системы Q_{Σ} с вероятностью отказа одного элемента, для чего составим функцию выигрыша:

$$\begin{aligned} V_Q &= (Q_s + Q_o) - Q_{\Sigma} = Q_s + Q_o - 2 Q_s - Q_o^2 + Q_s^2 = \\ &= Q_o (1 - Q_o) - Q_s (1 - Q_s). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Выигрыш по надежности соответствует положительным значениям функции выигрыша V_Q . Учитывая (5.57), получаем условие выигрыша по надежности:

$$Q_o (1 - Q_o) > Q_s (1 - Q_s) \quad (5.58)$$

или

$$Q_o > Q_s.$$

Таким образом, параллельное включение элементов эффективно, если преобладают отказы типа “обрыв”.

В общем случае для параллельного соединения m элементов с отказами двух видов (обрыв и короткое замыкание) расчет вероятности отказа системы не пред-

ставляет значительных трудностей и может быть осуществлен по уже известным формулам (см. пункты 4.1.1 и 4.1.2):

– вероятность отказа системы от обрывов

$$Q_m^{(o)} = Q_1^{(o)} \cdot Q_2^{(o)} \cdot \dots \cdot Q_m^{(o)} = \prod_{i=1}^m Q_i^{(o)}; \quad (5.59)$$

– вероятность отказа системы от коротких замыканий

$$Q_m^{(s)} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - Q_i^{(s)}); \quad (5.60)$$

– вероятность отказа всей группы при отказах элементов обоих типов

$$Q_\Sigma = Q_m^{(o)} + Q_m^{(s)} = \prod_{i=1}^m Q_i^{(o)} + 1 - \prod_{i=1}^m (1 - Q_i^{(s)}). \quad (5.61)$$

Вывод об эффективности резерва, сделанный ранее для случая двух элементов, сохраняется и для случая параллельного соединения m элементов.

5.1.7. Учет надежности переключателей

Для отключения отказавшего элемента и включения на его место в системе очередного резервного элемента необходимо устройство, называемое переключателем (см. рис. 5.2). Роль такого устройства может играть и человек, однако это обычно сопряжено с большим временем поиска и замены отказавшего элемента, поэтому эффективнее использовать автоматические переключатели.

Изучение надежности системы с резервированием при гипотезе об абсолютной надежности переключающих устройств (в том числе и индикаторов отказа, см. рис. 5.2) не всегда приемлемо в силу того, что переключатель, который является техническим устройством, сам может отказаться, снижая тем самым надежность системы. Расчет надежности системы с учетом переключателей осложняется тем, что приходится принимать дополнительные предположения о работе системы, например:

1) переключатель срабатывает независимо от состояния резервного элемента (даже если он вышел из строя);

2) переключающее устройство (ПУ) отказывает только в моменты включения (выключения) резервного элемента с вероятностью α , независимой от надежности и времени работы элементов.

С учетом этих допущений расчет надежности можно провести по схеме независимых испытаний Бернулли, причем результаты будут различаться в зависимости от того, по какой схеме выполнен переключатель. Исследуем два наиболее распространенных типа переключающих устройств.

I. Система имеет один переключатель на всю резервную группу, при этом отказ ПУ приводит к отказу всей группы.

II. Каждый элемент снабжен автономным переключателем, и при отказе одного из них вступает в действие следующее ПУ.

Далее будем рассматривать только случай нагруженного резерва с двумя типами переключающих устройств, предполагая, что элементы системы (одинаковые) имеют вероятность безотказной работы $P(t)$ и ненадежность $Q(t)$, а резервная группа (система) состоит из основного элемента, $n-1$ резервного и n переключателей.

а. Нагруженный резерв I

Пусть при последовательном срабатывании ПУ отказ переключателя произошел на k -м шаге, тогда вероятность этого события

$$P\{A_k\} = \alpha(1-\alpha)^{k-1}, \quad (5.62)$$

а вероятность исправной работы системы на n шагах (после n срабатываний переключателя и при этом ПУ не откажет)

$$P\{B_k\} = (1-\alpha)^n. \quad (5.63)$$

Вероятность отказа резервной группы (системы) равна вероятности сложного события, состоящего в том, что откажут все n элементов (основной и $n-1$ резервных), но исправно сработают все n переключателей, или откажут k элементов (основной и $k-1$ резервных) и откажет k -й переключатель (на k -м шаге). Согласно формуле полных вероятностей, имеем

$$Q_\Sigma = Q^n(1-\alpha)^n + \sum_{k=1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} \alpha Q^k. \quad (5.64)$$

Покажем, что ненадежность переключателей не позволяет получить в системе любую заданную надежность:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_\Sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha Q \sum_{k=1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} Q^{k-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha Q \sum_{k=1}^{n-1} [(1-\alpha)Q]^{k-1} = \frac{\alpha Q}{1-(1-\alpha)Q} \neq 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

(при $n \rightarrow \infty$ предел от Q_Σ равен сумме убывающей геометрической прогрессии).

Выражение (5.65) дает предельно достижимый уровень ненадежности в данном случае.

б. Нагруженный резерв II

В этом случае каждый резервный элемент снабжен отдельным независимым переключателем. Следовательно, расчетная схема сводится к схеме Бернулли.

Пусть за время работы k переключателей сработали, а $n-k$ отказали. Вероятность этого события находим по формуле Бернулли:

$$P\{A_k\} = C_n^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k}. \quad (5.66)$$

Отказ группы наступает при $(k+1)$ -м отказе элемента, поэтому вероятность отказа группы

$$Q_{\Sigma} = \sum_{k=0}^n C_n^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} Q^{k+1} = Q \sum_{k=0}^n C_n^k [(1-\alpha)Q]^k \alpha^{n-k}. \quad (5.67)$$

Так как второй множитель в выражении (5.67) представляет собой разложение по биному Ньютона, т. е. $\sum_{k=0}^n C_n^k [(1-\alpha)Q]^k \alpha^{n-k} = [(1-\alpha)Q + \alpha]^n$, то окончательно получаем вероятность отказа системы

$$Q_{\Sigma} = Q[(1-\alpha)Q + \alpha]^n, \quad (5.68)$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\Sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q[(1-\alpha)Q + \alpha]^n = 0. \quad (5.69)$$

Таким образом, применение автономных переключателей в принципе позволяет получить сколь угодно надежную систему. Поэтому при резервировании всегда целесообразно, если это позволяют другие ограничения, применять независимые переключатели.

Аналогичным образом можно провести анализ надежности и для других способов резервирования (ненагруженный и облегченный резерв), что не изменяет общий характер выводов.

Важно отметить, что при наличии одного переключателя ненадежность схемы принципиально не может быть уменьшена до нуля, а при наличии у каждого резервного элемента своего переключателя вероятность отказа системы при $n \rightarrow \infty$ может быть достигнута (хотя бы теоретически) сколь угодно малой.

Рассмотренные выше задачи, естественно, не исчерпывают всех возможных случаев. Например, переключающие устройства могут отказывать не только в моменты переключения, могут наблюдаться ложные срабатывания ПУ, когда в этом нет необходимости, может отказать индикатор отказов и т. д. Аналитические расчеты этих случаев являются весьма сложными и громоздкими.

5.1.8. Масштаб резервирования

Резервирование системы может осуществляться либо на уровне отдельных элементов (см. рис. 5.13), либо блоков, либо всей системы в целом (см. рис. 5.14). Уровень, на котором производится резервирование, называют *масштабом резервирования*. Чем большая часть системы резервируется, тем крупнее масштаб.

Покажем, что любое укрупнение масштаба резервирования уменьшает надежность системы (на примере типичной структуры системы по надежности). Пусть система имеет n элементов и m резервных частей для каждого элемента (см. рис. 5.13, 5.14). Ограничим задачу случаем $n=2$ и $m=1$ (рис. 5.16, 5.17), так как подобные структуры путем последовательных преобразований можно свести к это-

му простейшему варианту. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2$ – случайные времена жизни элементов системы.

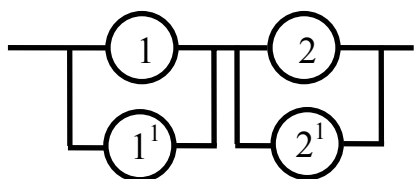


Рис. 5.16. Резервирование элементов

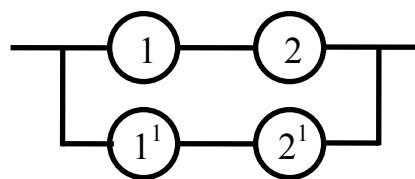


Рис. 5.17. Резервирование системы

1) Нагруженный резерв

Случайное время работы (жизни) для схемы на рис. 5.16

$$T_a = \min[\max(\tau_1, \tau'_1), \max(\tau_2, \tau'_2)], \quad (5.70)$$

а для системы на рис. 5.17

$$T_6 = \max[\min(\tau_1, \tau_2), \min(\tau'_2, \tau'_1)]. \quad (5.71)$$

Поскольку, как видно из схем (см. рис. 5.16, 5.17),

$$T_6 \leq \max(\tau_1, \tau'_1) \text{ и } T_6 \leq \max(\tau_2, \tau'_2),$$

то

$$T_6 \leq T_a,$$

т. е. вторая структура (см. рис. 5.17) имеет надежность не большую, чем первая.

2) Ненагруженный резерв

В прежних обозначениях имеем

$$T_a = \min[(\tau_1 + \tau'_1), (\tau_2 + \tau'_2)], \quad (5.72)$$

$$T_6 = \min(\tau_1, \tau_2) + \min(\tau'_1, \tau'_2). \quad (5.73)$$

Как следует из анализа схем, показанных на рис. 5.16, 5.17,

$$T_6 \leq \tau_1 + \tau'_1, \quad T_6 \leq \tau_2 + \tau'_2$$

и вновь получаем

$$T_6 \leq T_a.$$

Таким образом, случайное время жизни подобных систем с укрупнением масштаба резервирования в общем случае уменьшается. Причем это справедливо как для любого закона надежности элементов, так и для систем с другими структурными схемами по надежности.

Практическое применение данного вывода должно сопровождаться учетом целого ряда других реальных факторов – вес, габариты, энергопотребление, удобство обслуживания и т. д., так как уменьшении масштаба резервирования возрастает число соединительных и переключающих элементов. Следовательно, необходимо выбирать оптимальный масштаб резервирования, который обычно определяется при конструктивной проработке изделия.

5.2. Информационная избыточность

В технических системах используются различные источники информации, которые вводят в систему непрерывные или цифровые сигналы. В настоящее время большинство ответственных систем оперируют с дискретными сигналами, так как первичные датчики снабжаются встроенными микропроцессорами, и в состав систем входят управляющие ЭВМ.

В некоторых случаях для повышения достоверности информации используют несколько каналов ее ввода. Если эти каналы идентичны, то задача сводится к резервированию элементов. На практике, даже при одинаковых каналах, сигналы с датчиков никогда в точности не будут совпадать (в силу различных причин). Другим путем является комплексирование датчиков, т. е. установка разнородных каналов сбора информации. Для этого требуются дополнительные алгоритмические и программные средства, которые и обеспечивают системе *информационную* (алгоритмическую) *избыточность*.

Конкретные алгоритмы составляются в соответствии с особенностями решаемой задачи, но часто применяются и стандартные приемы повышения достоверности информации.

5.2.1. Метод повторного счета

Метод введения алгоритмической избыточности, являющийся наиболее простым, состоит в параллельной обработке одних и тех же данных (многократное повторение решения задачи целиком или по частям) и сравнении полученных результатов. Правильным считается такой исход обработки, при котором хотя бы два результата совпали. При несовпадении решение повторяется до тех, пока не будут получены одинаковые результаты, которые принимаются за истинные.

Данный способ обычно применяется при нагруженном резерве ЭВМ, используемых в системе. Это приводит к необходимости резервирования, что не всегда удобно.

Основное достоинство метода повторного счета – простота реализации. Достаточно дополнить рабочую программу операциями сравнения в необходимых контрольных точках и условным переходом на продолжение решения (при совпадении результатов) или на очередное повторение (при несовпадении). Метод позволяет устранить отказы типа “сбой”.

Недостатки метода: увеличение времени решения задачи, если ошибки (сбои) встречаются часто; ограниченность применения, так как в процессе решения промежуточные и исходные данные часто разрушаются и восстановить их затруднительно; исправляются только случайные ошибки (сбои), систематические ошибки не обнаруживаются.

Иногда повторный счет выполняют последовательно, но при этом в системе должен быть предусмотрен временной резерв для выполнения соответствующих операций. Экономия аппаратных средств здесь оборачивается большими запасами времени при синхронизации работы системы, либо усложнением алгоритма обме-

на данными при асинхронном режиме работы, что приводит к затруднению последовательного счета.

Если возникают сомнения в отсутствии систематической (методической) погрешности, то необходимо применять различные алгоритмы обработки одних и тех же данных. Такой путь эффективен на этапе разработки программного обеспечения, но в функционирующей системе практически не применим. В этой ситуации используются другие методы введения алгоритмической избыточности, например, метод усеченного алгоритма.

5.2.2. Метод усеченного алгоритма

Параллельно с основным работает усеченный алгоритм, который позволяет решать задачу не в полном объеме, а только относительно некоторых контрольных состояний, что приводит к экономии времени вычислений. Например, при решении системы дифференциальных уравнений можно заранее выполнить преобразования так, чтобы исходная система стала проще ценой потери какой-либо информации.

Усеченный алгоритм позволяет быстро (хотя и с меньшей точностью или для ограниченных входных данных) получить решение задачи. Сравнение результатов счета по полному и усеченному алгоритмам позволяет по заранее известной их точности оценить точность работы основного алгоритма. Если они расходятся на величину большую, чем расчетная точность, вычисления повторяются.

Усеченные алгоритмы стремятся сделать более быстрыми, чем основной, за счет уменьшения возможности первых. Поэтому контроль вычислений возможен не на всех наборах данных, а только на тех, на которых работает усеченный алгоритм. К тому же, построение усеченного алгоритма является сложной задачей (по сравнению с основным алгоритмом). В этом заключаются недостатки данного метода.

Для быстрого контроля правильности вычислений используются, в основном, следующие два метода.

5.2.3. Метод контрольных соотношений

Метод контрольных соотношений заключается в нахождении и контроле некоторых функциональных связей между переменными, вычисляемыми в системе (например, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$).

Достоинства метода – высокая точность, эффективность и малое время проверки контрольных соотношений.

Недостатки – сложность поиска (иногда) требуемых контрольных соотношений; ограниченность применимости, так как далеко не всегда интересующие нас переменные находятся в простой зависимости, удобной для контроля.

В силу указанных недостатков метода контрольных соотношений, которые довольно часто перевешивают его достоинства, чаще применяется способ контроля переменных в соответствии с их физическим смыслом.

5.2.4. Метод проверки предельных соотношений

Метод предельных соотношений (метод “вилки”) применяется, когда в задаче назначаются пределы (“вилка”), исходя, например, из физического смысла задачи, в которых должны находиться искомые переменные: $x_{j\min} \leq x_j \leq x_{j\max}$. Напри-

мер, если x_j – угол поворота руля, то $0 \leq x_j \leq \frac{\pi}{3}$. На основе анализа физических процессов программно предусматривается проверка в контрольных точках нахождения переменных в заданных пределах.

Метод обнаруживает грубые погрешности, которые делают бессмысленным дальнейшее продолжение вычислений, однако не позволяет контролировать правильность решения задачи с заданной точностью.

Таким образом, введение алгоритмической избыточности всегда сопровождается использованием либо аппаратной, либо временной (увеличение времени обработки информации) избыточностью, но не сводится к ним. Алгоритмическая избыточность наиболее эффективна, если при этом естественно реализуется и временная избыточность за счет циклического режима работы. Если в одном цикле работы не удастся организовать алгоритмическую избыточность, то приходится ее обеспечивать за счет аппаратной. Это указывает на некоторую размытость границ видов избыточности (особенно алгоритмической и временной), которые подразумеваются, в основном, в зависимости от особенностей решаемой задачи.

5.3. Обеспечение надежности в процессе проектирования

Обеспечение надежности системы производится на всех этапах ее создания и эксплуатации. Надежность изделия *закладывается* в процессе его проектирования; *обеспечивается* в процессе его изготовления; *сохраняется* при использовании соответствующих условий хранения и *поддерживается* при его эксплуатации.

Обеспечение надежности на этапах создания, хранения и эксплуатации состоит в неукоснительном выполнении технических условий, разработанных на стадии проектирования системы. Например, при изготовлении изделия должна соблюдаться технология, проводиться контроль качества исходных материалов, блоков, узлов и всего изделия. На стадии хранения должны поддерживаться условия, оговоренные в технической документации, а на стадии эксплуатации выполняться профилактика, плановый ремонт при обладании обслуживающим персоналом необходимой квалификации.

Процесс проектирования изделия [7] можно разбить на несколько типовых этапов (рис. 5.18): подготовительная стадия (выбор характеристик и норм надежности, разработка технического задания); эскизный проект (расчет характеристик надежности элементов, ориентировочный расчет надежности системы); технический проект (полный расчет надежности системы с учетом режимов работы элементов и внешней среды, рекомендации по повышению надежности); рабочий

проект (уточненный расчет – априорная надежность); изготовление и испытание опытного образца (апостериорная надежность, коррекция системы).



Рис. 5.18. Основные этапы проектирования изделия

Линейный характер диаграммы, показанной на рис. 5.18, является идеальным случаем проектирования, который практически не встречается. В зависимости от правильности и полноты решений, принятых на различных уровнях, приходится возвращаться на предыдущие этапы для каких-либо изменений.

5.3.1. Техническое задание

Подготовительная стадия включает в себя формулировку целей и задач проектирования системы, формирование ее основных характеристик и завершается выпуском технического задания (ТЗ) на систему. Техническое задание – это документ, содержащий перечень всех требований, которым должно удовлетворять изделие (выполнение которых считается необходимым для осуществления системой своих функций), и способы их проверки.

В техническом задании оговариваются требования по надежности: характеристики надежности изделия и их количественные значения (нормы надежности). Основным моментом при выборе и обосновании норм надежности является их рациональное назначение. Поскольку надежность (как комплексный показатель)

характеризуется многими показателями, то выбор конкретных характеристик надежности является неформальной задачей, решение которой зависит от назначения, условий функционирования изделия, требования по ремонтпригодности, от цены отказа и т. д.

Чаще всего в ТЗ указываются следующие характеристики надежности:

- наработка на отказ (среднее время безотказной работы);
- вероятность безотказной работы на заданном интервале времени;
- вероятность выполнения задачи (для систем разового применения);
- коэффициент готовности.

После выбора характеристик надежности возникает вопрос об их количественных значениях, который также не решается формальными средствами. При указании норм надежности часто возникает противоречие между заказчиком и исполнителем, так как первый стремится завысить нормы, а второй – занижить.

Выбор обоснованных количественных характеристик надежности (норм) должен проводиться исходя из нормативов, принятых в данной отрасли, и функционально-стоимостного анализа изделия, где учитывается не только денежная стоимость системы, но и ее физическая стоимость в виде ограничений на вес, габариты, энергопотребление и т. д., а также стоимость (последствия) отказов.

Для большинства изделий с ростом надежности увеличивается и их стоимость. Поэтому для ориентировочного выбора норм надежности изделия делятся на группы по надежности (по интенсивности отказов λ и среднему времени безотказной работы T_0). Например, за рубежом применяются уровни надежности элементов, показанные в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Группы изделий по надежности

Уровень	Интенсивность отказа λ , 1/час	Среднее время безотказной работы T_0 , час	Виды изделий
Рыночный	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^3$	Изделия общего пользования, не требующие количественной оценки надежности
Низкий	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^4$	Изделия неотчетливого назначения, требующие количественной оценки надежности
Стандартный военный	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^5$	—
Разгруженный стандартный	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$6,6 \cdot 10^5$	Изделия предыдущего уровня с режимом работы ниже номинального
Верхний	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^6$	—
Разгруженный верхний	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^7$	Изделия предыдущего уровня с режимом работы ниже номинального
Высший	$5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^7$	—

Как правило, независимо от способа назначения надежность системы в ТЗ завышается. В процессе подготовки ТЗ заказчик и разработчик должны прийти к компромиссному решению с учетом временных и стоимостных ограничений на проектирование. Кроме того, большое влияние оказывает расчетная цена системы при изготовлении. В процессе проектирования представления о системе могут изменяться, что приводит к необходимости корректировки технического задания. Это возможно по обоюдному и документально зафиксированному согласию сторон.

В заключении отметим, что на данном этапе после согласования всех требований ТЗ проводится формулировка общих рекомендаций по способам разработки изделия, которая должна указать на принципиальную возможность его создания.

5.3.2. Эскизное проектирование

Эскизный проект связан с расчетом основных параметров системы, разработкой ее функциональной схемы и определением требований к элементам системы (распределение характеристик ТЗ по отдельным элементам), в том числе и по надежности. Исходной информацией для решения является норма надежности изделия и выбранная схема системы.

При расчете надежности элементов системы чаще всего предполагают, что:

- учитываются только внезапные отказы элементов;
- принимается подходящая гипотеза о соотношении надежности элементов (в основном элементы считают равнонадежными);
- характеристики надежности элементов подчиняются экспоненциальному закону распределения.

С учетом введенных допущений и зная из ТЗ требуемую интенсивность отказа системы, получаем весьма приближенную (по порядку) оценку интенсивностей отказов элементов системы:

$$\lambda_i \approx \frac{\lambda_{\Sigma}}{n}, \quad (5.74)$$

где λ_i – интенсивности отказов элементов; λ_{Σ} – интенсивность отказа системы; n – количество элементов системы.

При этом необходимо хотя бы приблизительно учесть ожидаемые условия работы элементов, так как внешняя среда существенно влияет на надежность.

Если известно соотношение между надежностями элементов, то расчет можно уточнить. Такое ориентировочное знание надежностей элементов позволяет уже на начальных этапах проектирования оценить возможность применения существующих элементов или предсказать необходимость разработки новых.

На основании расчетов основных параметров системы и выбора ее элементов (в том числе и по надежности) в заключении эскизного проекта составляется полная функциональная схема системы и производится ориентировочный расчет ее надежности. При этом опираются на следующие допущения:

- а) в функциональной схеме учитываются только те узлы и блоки, которые необходимы для выполнения основных функций системы;

- б) отказы считаются независимыми и внезапными;
- в) закон надежности – экспоненциальный;
- г) интенсивность отказов элементов определяется для некоторых фиксированных (типовых) условий, поэтому учет этих условий работы изделия производится за счет поправочных коэффициентов – коэффициентов интенсивности

$$\lambda_i = K_i \cdot \lambda_{i\text{баз}}, \quad (5.75)$$

где $\lambda_{i\text{баз}}$ – базовые интенсивности отказов элементов (лабораторные условия); K_i – коэффициенты интенсивности (табл. 5.3); λ_i – интенсивности отказов с учетом условий эксплуатации.

Таблица 5.3

Коэффициенты интенсивности

Тип изделия (условия эксплуатации)	Коэффициент интенсивности, K_i
Лабораторные условия	1
Наземные стационарные установки	10
Корабельные установки	17
Автомобильные установки	20 – 25
Железнодорожный транспорт	30
Самолетные системы	40 – 60
Военные самолеты	100 – 120
ЗУРС	700
Баллистические ракеты	1000 – 1200

Применение подобного подхода связано с тем, что $\lambda_{i\text{баз}}$ может быть известно для конкретных условий эксплуатации и его необходимо пересчитать для других условий.

В результате эскизного проектирования определяются несколько вариантов решения задачи, поставленной в ТЗ, причем для каждого варианта необходимо рассчитать однотипные характеристики с целью анализа и сравнения вариантов между собой. Выбор вариантов для дальнейшей разработки производится заказчиком проекта, часто по неформальным критериям. Экономически выгоднее оставить один вариант, но при этом возрастает цена ошибки решения. С точки зрения надежности принятие того или иного варианта системы означает, что разработчик в состоянии приобрести или изготовить необходимые элементы изделия с требуемым уровнем надежности. Если такие элементы отсутствуют, то на стадии эскизного проекта можно принять решение о повышении надежности элементов с помощью специальных мер (введение избыточности). Естественно, что принятие решения о выборе варианта изделия для дальнейшей разработки должно опираться не только на характеристики надежности, но и выполнение остальных ограничений и требований ТЗ (стоимость, габариты, вес, энергопотребление и т. д.).

5.3.3. Технический проект

На стадии технического проектирования производится расчет элементов и узлов системы, составление ее электрической, механической и других схем, расчет рабочих режимов работы всех элементов, компоновка элементов и узлов, макетирование и испытание отдельных элементов и системы в целом. При этом выясняется большинство ошибок, допущенных на предыдущих этапах проектирования, уточняются все принятые решения, определяются фактические режимы работы элементов изделия. Результатом работы на данной стадии должен являться окончательный вариант системы.

На этапе технического проекта производятся основные расчеты по обеспечению надежности:

- 1) составляется полная расчетная схема (модель) системы по надежности с учетом выбранных элементов, схемы их соединения и нагрузок;
- 2) рассчитываются показатели надежности элементов и системы (полный расчет);
- 3) выдаются рекомендации по повышению надежности;
- 4) оценивается удобство работы с системой, ее ремонтпригодность, предусматривается (при необходимости) средства поиска неисправностей;
- 5) определяются допуски на параметры элементов системы.

5.3.4. Типовая методика расчета надежности

1. Из исходной системы выделяется основная часть, обеспечивающая выполнение требуемых от изделия функций. К дополнительным элементам обычно относят те, которые не участвуют непосредственно в выполнении заданных функций системы, но их отказы могут привести к изменению условий работы системы.

2. Определяются режимы работы основных элементов системы.

3. Определяются изменения этих режимов при отказах вспомогательных элементов с учетом условий внешней среды.

4. Рассчитываются интенсивности отказов элементов с учетом изменения режимов работы элементов. Для этого используются либо экспериментальные зависимости, либо теоретические, полученные на основании изучения физики отказов.

5. Находятся вероятности отказов элементов, вызванные за счет постепенных отказов.

6. Принимается гипотеза о независимости постепенных и внезапных отказов, и определяется надежность каждого элемента:

$$P_j = P_{j \text{ внезап}} \cdot P_{j \text{ постепен}}$$

где $P_{j \text{ внезап}}$, $P_{j \text{ постепен}}$ – вероятности внезапных и постепенных отказов элементов соответственно. При этом обычно принимают экспоненциальный закон надежности при внезапных отказах: $P_{j \text{ внезап}} = e^{-\lambda_j t}$.

7. В соответствии со структурой системы рассчитываются характеристики надежности изделия.

Во многих сложных изделиях структура системы во время работы изменяется. Поэтому необходимо рассчитывать надежность всех элементов системы. При этом обязательно надо учитывать, что при переходе от одной структуры к другой работа элементов в переходном режиме может изменить их надежность, что требует дополнительных расчетов.

Поскольку данные по надежности элементов принципиально содержат погрешности, то расчет надежности целесообразно проводить не только для средних значений интенсивностей отказов, но и для минимальных и максимальных значений интенсивностей. В справочниках по надежности, как правило, приводятся три значения параметра λ : λ_{min} , λ_0 , λ_{max} (например, 10^{-7} , 10^{-6} , 10^{-5}).

Если по итогам расчета надежности системы она оказывается неудовлетворительной, то необходимо пересмотреть выбранные решения. В зависимости от конкретной системы пути повышения надежности отличаются друг от друга.

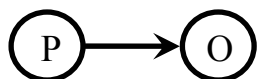
5.3.5. Модели обеспечения надежности

Меры по повышению надежности зависят от того, какие модели надежности использует разработчик. Прежде всего, осуществляется анализ структуры системы. Исходная структура обычно получается следующими способами: случайно, на основе личного опыта; на основании систем-аналогов; с помощью применения идей оптимизации структуры формальными методами.

В большинстве исходных структур, как показывает опыт, присутствует избыточность. Но не всякая избыточность повышает надежность системы, а только та, которая согласована с характером отказов в системе. Общим правилом при проектировании системы должно быть получение структуры с минимальной сложностью. Сложность структуры описывается различными количественными характеристиками. Наиболее просто сравниваются системы по числу элементов и связей между ними.

Модели обеспечения надежности зависят от степени подробности структуры (модели) по надежности, и по мере роста подробности разработки системы они становятся все более конкретными. Считая структуру системы принятой, учитывая особенности системы, рассмотрим наиболее известные модели обеспечения надежности.

а. Невосстанавливаемая система



Р – работоспособность;
О – отказ

Рис. 5.19. Модель системы без восстановления (модель первого вида)

Модель, показанная на рис. 5.19, соответствует системе без восстановления с равнозначными отказами. Единственным способом повышения надежности здесь

является уменьшение интенсивности отказов элементов и системы. Для этого необходимо правильно выбрать структуру системы.

С точки зрения повышения надежности структура системы должна быть минимально сложной (с минимальным количеством элементов и связей). Введение в систему дополнительных элементов должно быть не стихийным, а подтверждаться соответствующими расчетами. При выбранной структуре системы рост надежности возможен только за счет повышения надежности элементов. Для этого используют следующие меры:

1) выбор более надежных элементов (этот путь ограничен номенклатурой и стоимостью элементов);

2) облегчение всех режимов (электрических, механических, тепловых, радиационных, гидравлических и др.) работы элементов, использование элементов с большой перегрузочной способностью – это основной путь;

3) применение технологических и организационных мероприятий. Например, использование апробированных и унифицированных элементов, входного контроля качества, предварительной приработки элементов; повышение квалификации обслуживающего персонала.

Модели первого вида характерны для систем разового применения или для систем с невысокой ценой отказа. Средства повышения надежности в данном случае можно назвать внесистемными, так как они реализуются за счет внешних дополнительных мероприятий.

б. Невосстанавливаемая система с промежуточными состояниями работоспособности



Рис. 5.20. d -безотказная структура без восстановления (модель второго вида)

Модель, изображенная на рис. 5.20, соответствует невозстанавливаемой системе с промежуточными состояниями работоспособности. Она характерна для d -безотказной структуры резервированных систем (так как из состояния работоспособности “Р” в состояние отказа “О” можно попасть только через d промежуточных состояний “ P_i ”, в которых система хотя бы частично исправна), когда перерывы в работе недопустимы. Такие структуры обычно используются (реализуются) за счет нагруженного резерва (аппаратная избыточность), причем довольно часто с участием оператора.

Меры повышения надежности для моделей второго вида те же, что и для моделей первого вида. Ограничение на выбор числа промежуточных состояний работоспособности d описаны в разделе 5.1 (обычно $d = 2-4$).

в. Восстанавливаемая система

Данная модель (рис. 5.21) соответствует системе без избыточности с равнозначными отказами, причем восстановление системы начинается только после от-

каза. Для повышения надежности пригодны все способы, указанные для модели первого вида. Кроме того, надежность системы может возрасти за счет увеличения интенсивности восстановления μ .

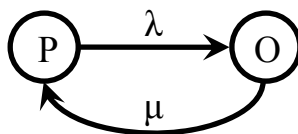


Рис. 5.21. Модель системы с восстановления (модель третьего вида)

г. Восстанавливаемая система с промежуточными состояниями работоспособности

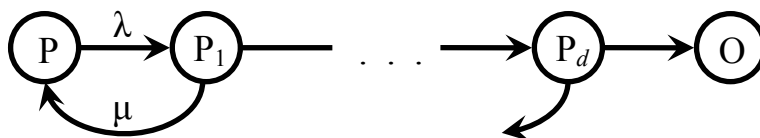
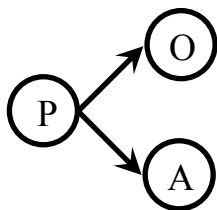


Рис. 5.22. d -безотказная структура с восстановления (модель четвертого вида)

Модель, изображенная на рис. 5.22, соответствует случаю системы с избыточностью и началом восстановления из промежуточного состояния работоспособности. В данной структуре за счет восстановления можно удерживать систему в состоянии хотя бы частичной работоспособности. Для увеличения интенсивности восстановления μ применяются специальные меры.

д. Система с неравнозначными отказами



Р – работоспособность;
 О – обычный отказ (с малой интенсивностью);
 А – аварийный отказ

Рис. 5.23. Модель системы с неравнозначными отказами (модель пятого вида)

Для подобных систем (рис. 5.23) основные усилия тратятся на уменьшение вероятности аварийного отказа (состояние А) за счет использования всех средств, указанных в моделях вида 1–4 (см. рис. 5.19–5.22). Например, влияние обычных отказов уменьшают за счет процесса восстановления (модель третьего вида, см. рис. 5.21), а аварийных – путем использование мер для модели четвертого вида (см. рис. 5.22).

Таким образом, средства повышения надежности должны быть согласованы с природой и количественными характеристиками отказов, а также обоснованы с экономической точки зрения, так как, в основном всякое повышение надежности сопровождается удорожанием системы.

е. Модель вида 6

Модель обеспечения надежности шестого вида, показанная на рис 5.24, является развитием и обобщением моделей вида 4 и 5, отражает системы с неравнозначными последствиями отказов. При этом для повышения надежности элементов, отказы которых приводят к аварийным ситуациям, используются *d*-безотказные структуры, а для остальных элементов – обычные методы снижения вероятности отказов и уменьшения времени ремонта. Возможно также построение структур с ограниченным последствием отказов, когда система при отказе сначала попадает в “неопасное” состояние (так называемый “защитный” отказ). В этом случае суммарные потери в выходном эффекте системы снижаются за счет перераспределения отказов.

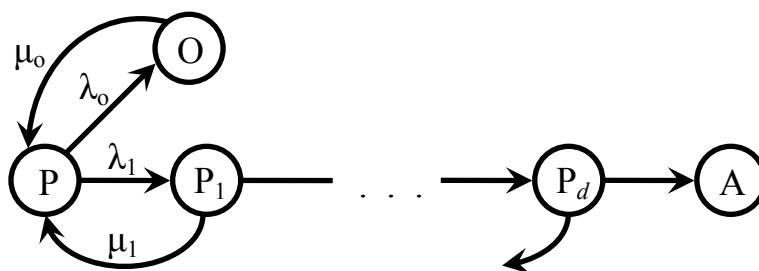


Рис. 5.24. Модель обеспечения надежности вида 6

Сложные системы (АСУ) часто допускают функционирование с разным уровнем качества, при этом модели вида 2, 4–6 описывают уровни работоспособности P_i с различной эффективностью E_i , причем $E_1 > E_2 > \dots > E_d$. При такой интерпретации становится очевидным иерархический принцип построения сложных систем.

Приведенные модели, естественно, не всех конкретных ситуаций и могут быть продолжены для различных типов систем.

5.3.6. Рабочий проект

На стадии рабочего проектирования создается полный комплект проектной документации, по которой изделие можно изготовить, отрегулировать (настроить) и эксплуатировать.

Для обеспечения надежности и сохранения изделием заложенных характеристик необходимо правильно выбрать технологию изготовления, требования к исходным материалам и комплектующим, назначить контрольные и промежуточные допуски на все стадии изготовления, разработать комплекс мер по обеспечению всех перечисленных мероприятий.

Так как на этой стадии полностью определяются все элементы системы и их режимы работы, появляется возможность сделать окончательный расчет ожидаемой (априорной) надежности системы.

В зависимости от проектируемого изделия рабочий проект обычно завершается изготовлением опытных образцов элементов системы, опытного образца всей системы или небольшой партии систем. Располагая реальными изделиями, необ-

ходимо провести их испытания (последний этап проектирования, см. рис. 5.18) с целью подтверждения соответствия их характеристик требованиям технического задания.

5.3.7. Испытания на надежность

Под *испытанием* будем понимать специально организованный процесс получения, сбора и переработки информации для определения характеристик надежности. Выделяют два основных вида этого процесса:

- стендовые испытания, которые проводятся на специальном оборудовании (стендах);
- испытания, состоящие в сборе информации о работе реально функционирующего изделия.

Стендовые испытания позволяют всесторонне проверить изделие за короткий срок, но они, обычно, являются дорогостоящими и не всегда обеспечивают реальные условия работы изделия. Данный вид испытаний применяется для ответственных систем, либо для простых элементов и узлов. Для серийных систем более целесообразен сбор информации в режиме их функционирования.

Независимо от способа проведения испытания делятся на следующие виды:

- определительные;
- контрольные.

Основная цель определительных испытаний, проводящихся на стадии подготовки к выпуску изделия – определить оценки фактических характеристик надежности. На стадии изготовления и эксплуатации проводят контрольные испытания, целью которых является проверка соответствия между фактическими и паспортными (номинальными, теоретическими) характеристиками.

Отличие между определительными и контрольными испытаниями состоит в том, что вторые обычно проводятся по более простым методикам для ограниченного числа характеристик надежности.

Методы любых испытаний на надежность основаны на организации сбора и переработки информации об отказах изделия. Здесь различают испытания:

- проводящиеся в условиях, близких к эксплуатационным;
- проводящихся в специальных режимах.

Любые испытания предполагают разработку плана испытаний, который должен дать однозначное представление о порядке их проведения. Например, в план испытаний обычно включают: объем испытываемой партии изделий, продолжительность и режимы испытаний, периодичность контроля отказов и т. д. В настоящее время развит подход к оптимальному планированию испытаний, который позволяет получить максимальный объем информации при наименьшей стоимости испытаний.

Для современных высоконадежных элементов и систем получение достаточного объема информации об отказах является непростой задачей, особенно при ограниченном числе испытаний. Для увеличения эффективности испытаний при-

меняют методы ускоренных испытаний на надежность, которые делятся на две группы.

1. Испытания в нормальных условиях эксплуатации ускоряются за счет установления более узкого поля допуска на параметры изделия или за счет прогноза внезапных отказов по наблюдению за параметрами элемента (рис. 5.25).

Здесь всегда $\tau_{\Delta} < \tau$, и время τ_{Δ} тем меньше, чем меньше узкое поле допуска Δ . По зафиксированной реализации интенсивности отказов $\lambda(t)$ на интервале $(0, \tau_{\Delta})$ можно при помощи экстраполяции продлить кривую $\lambda(t)$ до ее пересечения с рабочим полем допуска λ_I . Точность определения истинного времени жизни элемента τ по значению τ_{Δ} зависит от характера кривой $\lambda(t)$ и соотношения основного $(\lambda_I, \lambda_{II})$ и суженного Δ полей допуска. В большинстве случаев $\lambda(t)$ является монотонной, поэтому точность экстраполяции оказывается высокой.

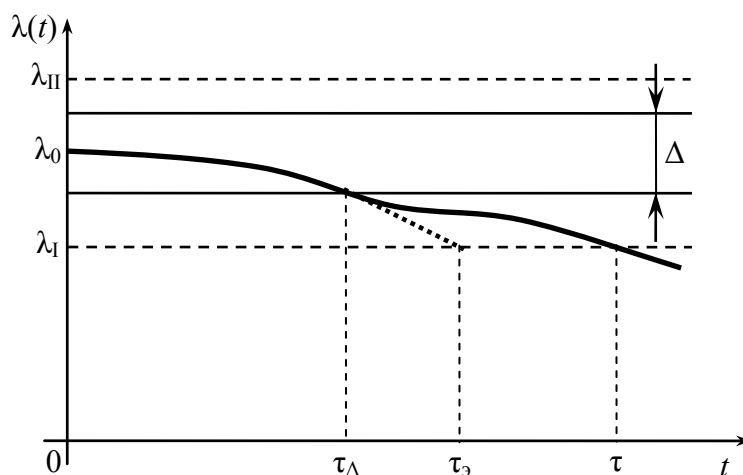


Рис. 5.25. Использование кривой интенсивности отказов при ускоренных испытаниях первой группы

Внезапный отказ – следствие внутренних процессов, протекающих в элементе. Поэтому если известна модель отказа, т. е. функциональная связь между параметрами элемента и его основными характеристиками, то, наблюдая за параметрами, можно предсказать момент отказа. Основным препятствием широкого применения этого подхода является необходимость построения адекватных математических моделей отказов, что в ряде случаев весьма затруднительно.

2. Применение форсированных испытаний, т. е. испытаний в более тяжелых режимах работы системы.

Пусть некоторая характеристика надежности N зависит от режимного вектора $\bar{\varepsilon}$ и времени:

$$N = f[\bar{\varepsilon}, t].$$

Тогда в момент времени t_1 и некотором режиме $\bar{\varepsilon}_1$ значение этой характеристики будет

$$N_1 = f[\bar{\varepsilon}_1, t_1].$$

Предположим, что режим $\bar{\varepsilon}_2 > \bar{\varepsilon}_1$, т. е. $\bar{\varepsilon}_2$ – более тяжелый режим. Тогда, чтобы при режиме $\bar{\varepsilon}_2$ характеристика N достигла значения N_1 , потребуется меньше времени $t_2 < t_1$:

$$N_1 = f[\bar{\varepsilon}_2, t_2], \quad t_2 < t_1.$$

При форсированных испытаниях снова возникает задача пересчета найденной характеристики надежности на нормальный режим эксплуатации. Для этого необходимо:

а) знать модель подобия режимов (при чрезмерных уровнях форсирования режимов может нарушаться вид самой функциональной зависимости N , и полученные результаты будут недостоверными);

б) правильно выбирать степень форсирования, чтобы модель соответствовала реальной картине процессов.

Форсированные испытания (при условии знания модели отказов) являются наиболее перспективным видом испытаний. Но при построении эффективных методик ускоренных испытаний необходимо предварительно проанализировать влияние основных (режимных) параметров (температуры, электрических и механических нагрузок и т. п.) на показатели надежности.

Отметим, что изменение механизма отказов может изменить соотношение вкладов отдельных составляющих в общую ненадежность системы и исказить картину отказов. Обычно на основе наблюдений уточняется модель отказов и выясняется значение интенсивности отказов при номинальных режимах.

Запуск изделия в эксплуатацию не означает окончание забот о его надежности. Необходимо обеспечить сохраняемость и правильную эксплуатацию системы. Как показывает опыт, распределение причин отказов, например, радиоэлектронной аппаратуры имеет следующий вид (табл. 5.4):

Таблица 5.4

Распределение отказов радиоэлектронной аппаратуры

Тип отказа	Доля отказа, %
Ошибки проектирования изделия	40–45
Ошибки изготовления изделия	≈ 20
Ошибки эксплуатации	≈ 30
Естественные отказы изделия	5–7

5.4. Обеспечение и повышение ремонтпригодности системы

Техническое обслуживание и ремонт системы являются существенными средствами обеспечения надежности. Интенсивность восстановления может быть повышена за счет системных и организационных мер. К системным мерам относят все, что связано с обеспечением и повышением ремонтпригодности системы.

Рассмотрим типовую структуру времени восстановления (простоя, ремонта):

$$\tau_B = \tau_o + \tau_n + \tau_p + \tau_{пр}, \quad (5.76)$$

где τ_B – время восстановления; τ_o – время обнаружения отказа (время осознания ненормальной работы системы); τ_n – время поиска неисправности (диагностика); τ_p – время ремонта (замены) отказавшего элемента; $\tau_{пр}$ – время проверки (тестирования) характеристик отремонтированной системы.

В общем случае каждая составляющая времени восстановления (5.76) – случайная величина, уменьшение которой достигается различными способами, образующими комплекс мер по улучшению надежности через свойство ремонтпригодности.

Методы обнаружения отказов и поиска неисправностей идеологически однотипны, достаточно просты и сводятся к получению информации о функционировании элементов системы и сравнении ее с заданной. Технические устройства для определения степени работоспособности, нахождения причин и мест возникновения отказов образуют комплекс средств диагностирования (система контроля), которые обеспечивают:

- 1) контроль работоспособности изделия, установление факта и момента отказа;
- 2) поиск неисправности (место и причина отказа).

Использование систем контроля позволяет сократить время обнаружения отказа и время послеремонтной проверки. Например, при непрерывном контроле $\tau_o \rightarrow 0$, а при периодическом контроле τ_o не превосходит периода обследования системы.

Для уменьшения времени восстановления необходимо принимать меры по сокращению каждой его составляющей (5.76). Очередность мер определяется удельным весом каждой компоненты и стоимостью реализации предлагаемых решений.

В ответственных системах с высокой ценой отказов важнее всего быстро обнаружить отказ и принять меры по блокировке аварийных ситуаций. Для уменьшения τ_o такие системы снабжаются встроенными системами контроля, чаще всего автоматическими. Система контроля строится с использованием независимых аппаратных средств и в настоящее время реализуется в основном с помощью микропроцессорных средств. Но возможны отказы самой системы контроля, что может привести к ложным отказам изделия (хотя и ложный отказ дешевле, чем основной).

Для уменьшения времени поиска неисправности τ_n применяются автоматизированные системы диагностики, которые позволяют с точностью до некоторого уровня локализовать неисправность. Чаще всего используется уровень функциональных блоков. Системы диагностики выполняют проверку основной системы либо снизу вверх (по функциональным уровням), либо наоборот. Независимо от метода диагностика сводится к выполнению тестовых проверок, исходы которых для исправной системы заранее известны. Поэтому основная проблема здесь – составление достаточно полной системы тестов. Формализованный синтез тестов

достиг максимального уровня для цифровых устройств. Для электромеханических систем в настоящее время развиваются методы экспертных систем (оценок): специализированные прикладные программы, позволяющие использовать знание и опыт людей (экспертов) для построения причинно-следственных связей. Экспертные системы перспективны для решения задач диагностики в условиях массового производства, когда возможно накопление информации и совершенствование базы знаний. В автоматических системах применяют простейшие варианты систем диагностики, которые позволяют обнаружить только основные, но наиболее важные неисправности.

Время ремонта τ_p в системах с резервированием обычно мало поддается уменьшению, так как τ_p определяется сугубо техническими средствами. В системах без резервирования время τ_p формируется организационными причинами.

Время проверки $\tau_{пр}$ характеристик восстановленной системы определяется временем работы системы контроля и сокращается за счет автоматизации контролирующих систем.

Влияние любой системы контроля (и диагностики) на надежность основной системы противоречиво, так как отказы системы контроля могут привести к снижению надежности изделия. Поэтому необходимо проектировать системы контроля так, чтобы их отказы непосредственно не влияли на функционирование основной системы. Если при проектировании системы не предусмотреть вопросы ремонтпригодности, то ее надежность заметно снижается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Половко, А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
3. Сотсков, Б.С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники: учебное пособие / Б.С. Сотсков. – М.: Высшая школа, 1970. – 271 с.
4. Дружинин, Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем / Г.В. Дружинин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480 с.
5. Бессонов, А.А. Надежность систем автоматического управления / А.А. Бессонов, А.В. Мороз. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
6. Базовский, И. Надежность. Теория и практика / И. Базовский – М.: Мир, 1965. – 373 с.
7. Козлов, Б.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б.А. Козлов, И.А. Ушаков. – М.: Сов. радио, 1975. – 472 с.
8. Голинкевич, Т.А. Прикладная теория надежности: учебник / Т.А. Голинкевич. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1985 – 165 с.
9. Сборник задач по теории надежности / А.М. Половко, И.М. Маликов, А.Н. Жагарев, В.И. Зарудный; под ред. А.М. Половко, И.М. Маликова. – М.: Советское радио, 1972. – 407 с.
10. Глазунов, Л.П. Основы теории надежности автоматизированных систем управления: учебное пособие / Л.П. Глазунов, В.П. Грибовецкий, О.А. Щербаков. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 208 с.
11. Барлоу, Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан; пер. с англ. И.А. Ушакова; под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Сов. радио, 1969. – 488 с.
12. Кокс, Дж. Р. Теория восстановления / Дж.Р. Кокс, В. Смит; пер. с англ. О.В. Селезнева; под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Сов. радио, 1969. – 299 с.
13. Барлоу, Р. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность / Р. Барлоу, Ф. Прошан; пер. с англ. И.А. Ушакова. – М.: Наука, 1984. – 327 с.
14. Райншке, К. Оценка надежности систем с использованием графов / К. Райншке, И.А. Ушаков. – М.: Сов. радио, 1988. – 209 с.
15. Коваленко, И.Н. Методы расчета высоконадежных систем / И.Н. Коваленко, Н.Ю. Кузнецов. – М.: Радио и связь, 1988. – 215 с.
16. Афанасьев, В.Г. Методы анализа надежности и критичности отказов сложных систем / В.Г. Афанасьев, В.А. Зеленцов, А.Н. Миронов. – М.: Мин-во обороны, 1992. – 100 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Надежность. Основная терминология и математическая модель	
1.1. Терминология теории надежности.....	5
1.2. Математическая модель надежности.....	7
2. Надежность элементов, работающих до первого отказа	
2.1. Основные характеристики надежности.....	10
2.2. Типовые законы надежности	
2.2.1. Экспоненциальный закон.....	17
2.2.2. Нормальный закон.....	19
2.2.3. Закон Вейбулла.....	21
2.3. Суперпозиция законов распределения.....	22
2.4. Оценка надежности элемента.....	24
2.5. Выбор типа теоретического распределения наработки до первого отказа.....	28
3. Надежность элементов с восстановлением.....	30
3.1. Надежность элемента с мгновенным восстановлением	
3.1.1. Основные характеристики процесса восстановления.....	30
3.1.2. Задача о запасных элементах.....	36
3.1.3. Поток Пуассона.....	36
3.1.4. Оценки функции восстановления.....	38
3.1.5. Основные теоремы теории восстановления.....	40
3.1.6. Надежность работы элемента на заданном участке времени.....	41
3.2. Надежность элемента с конечным временем восстановления	
3.2.1. Коэффициент готовности.....	44
3.2.2. Случай экспоненциальных законов. Схема гибели и размножения... ..	50
4. Структурная надежность систем.....	53
4.1. Расчет типовых структур систем по надежности.....	53
4.1.1. Последовательная схема.....	55
4.1.2. Параллельная схема.....	57
4.1.3. Смешанная структура.....	58
4.1.4. Сложные структуры.....	59
4.2. Надежность системы с зависимыми отказами.....	62
4.3. Надежность систем с восстановлением.....	66
5. Избыточность для повышения надежности систем.....	71
5.1. Аппаратная избыточность.....	72
5.1.1. Нагруженный резерв.....	72
5.1.2. Оценка эффективности резервирования.....	76
5.1.3. Ненагруженный резерв.....	79
5.1.4. Облегченный резерв.....	82
5.1.5. Скользящий резерв.....	85
5.1.6. Резервирование при отказах типа короткого замыкания и обрыва... ..	89

5.1.7. Учет надежности переключателей.....	91
5.1.8. Масштаб резервирования.....	93
5.2. Информационная избыточность.....	95
5.2.1. Метод повторного счета.....	95
5.2.2. Метод усеченного алгоритма.....	96
5.2.3. Метод контрольных соотношений.....	96
5.2.4. Метод проверки предельных соотношений.....	97
5.3. Обеспечение надежности в процессе проектирования.....	97
5.3.1. Техническое задание.....	98
5.3.2. Эскизное проектирование.....	100
5.3.3. Технический проект.....	102
5.3.4. Типовая методика расчета надежности.....	102
5.3.5. Модели обеспечения надежности.....	103
5.3.6. Рабочий проект.....	106
5.3.7. Испытания на надежность.....	107
5.4. Обеспечение и повышение ремонтпригодности системы.....	109
Библиографический список.....	112